

---

## MATHEMATIQUES

### Calculs algébriques et équations : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

---

#### Exercice 1

- $A$  est un produit de deux facteurs :  $(2x + 6)$  et  $(5x - 3)$ . C'est donc une forme factorisée que l'on va développer :

$$\begin{aligned} A &= (2x + 6)(5x - 3) \\ &= 2x \times 5x - 2x \times 3 + 6 \times 5x - 6 \times 3 \\ &= 10x^2 - 6x + 30x - 18 \\ &= 10x^2 + 24x - 18 \end{aligned}$$

#### Conseil d'ami

On développe  $A$  en s'occupant en premier du signe de chaque terme : « + par + fait + », « - par - fait + » et « - par + fait - »

- $B$  est encore un produit de deux facteurs :

$$\begin{aligned} B &= (x + 3)(1 - 2x) \\ &= x \times 1 - 2x \times x + 3 \times 1 - 3 \times 2x \\ &= x - 2x^2 + 3 - 6x \\ &= -2x^2 - 5x + 3 \end{aligned}$$

#### Evidemment

On n'oublie pas que  $x \times x = x^2$

- $C$  est une différence de deux termes :  $9x$  et  $18$ . Il s'agit donc de la factoriser :

$$\begin{aligned} C &= 9x - 18 \\ &= \underline{9} \times x - \underline{9} \times 2 \\ &= 9(x - 2) \end{aligned}$$

#### Il faut le voir

En remarquant que  $18$  s'écrit  $9 \times 2$ , on peut utiliser la formule  $ka + kb = k(a + b)$ .

- $D$  est une somme de deux termes :  $5x^2$  et  $3x$ . On la factorise :

$$\begin{aligned} D &= \underline{5x^2} + \underline{3x} \\ &= \underline{x}(5x + 3) \end{aligned}$$

#### Il faut le voir

Dans les termes  $5x^2$  et  $3x$ , il y a un facteur commun  $x$ .

#### Exercice 2

#### Méthode

1. On repère dans l'expression le produit remarquable à développer qui est de la forme  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$  ou  $(a + b)(a - b)$ .
2. On écrit l'identité remarquable à développer en identifiant  $a$  et  $b$ . La forme développée est alors  $a^2 + 2ab + b^2$  ou  $a^2 - 2ab + b^2$  ou encore  $a^2 - b^2$ .
3. On applique les règles de priorités opératoires habituelles pour terminer le calcul.

$$\begin{aligned} A &= (4x - 1)^2 \\ &= \underbrace{(4x)^2}_{\text{carré de } 4x} - \underbrace{2 \times 4x \times 1}_{\substack{\text{double} \\ \text{produit de } 4x \\ \text{par } 1}} + \underbrace{1^2}_{\text{carré de } 1} \\ &= 4x^2 - 8x + 1 \end{aligned}$$

#### Méthode

On utilise l'égalité  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  avec  $a = 4x$  et  $b = 1$ .

$$\begin{aligned}
 B &= (2 + 4x)^2 \\
 &= \underbrace{2^2}_{\text{carré de 2}} + \underbrace{2 \times 2 \times 4x}_{\substack{\text{double} \\ \text{produit de 2} \\ \text{par } 4x}} + \underbrace{(4x)^2}_{\text{carré de } 4x} \\
 &= 4 + 16x + 16x^2 \\
 &= 16x^2 + 16x + 4
 \end{aligned}$$

### Méthode

On utilise l'égalité  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  avec  $a = 2$  et  $b = 4x$ .

$$\begin{aligned}
 C &= (5 - 2x)^2 \\
 &= \underbrace{5^2}_{\text{carré de 5}} - \underbrace{2 \times 5 \times 2x}_{\substack{\text{double} \\ \text{produit de 5} \\ \text{par } 2x}} + \underbrace{(2x)^2}_{\text{carré de } 2x} \\
 &= 25 - 20x + 4x^2 \\
 &= 4x^2 - 20x + 25
 \end{aligned}$$

### Méthode

On utilise l'égalité  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  avec  $a = 5$  et  $b = 2x$ .

$$\begin{aligned}
 D &= (2x - 6)(2x + 6) \\
 &= \underbrace{(2x)^2}_{\text{carré de } 2x} - \underbrace{6^2}_{\text{carré de 6}} \\
 &= 4x^2 - 36
 \end{aligned}$$

### Méthode

On utilise l'égalité  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  avec  $a = 2x$  et  $b = 6$ .

$$\begin{aligned}
 E &= 4 - \underbrace{(2x + 1)^2}_{(a+b)^2} \\
 &= 4 - \left( \underbrace{(2x)^2}_{\text{carré de } 2x} + \underbrace{2 \times 2x \times 1}_{\substack{\text{double} \\ \text{produit de } 2x \\ \text{par } 1}} + \underbrace{1^2}_{\text{carré de } 1} \right) \\
 &= 4 - (4x^2 + 4x + 1) \\
 &= 4 - 4x^2 - 4x - 1 \\
 &= -4x^2 - 4x + 3
 \end{aligned}$$

### Attention

La parenthèse est précédée d'un signe « - », on change les signes.

$$\begin{aligned}
 F &= \underbrace{(2x + 6)^2}_{(a+b)^2} - \underbrace{(x - 1)^2}_{(a-b)^2} \\
 &= ((2x)^2 + 2 \times 2x \times 6 + 6^2) - (x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) \\
 &= (4x^2 + 24x + 36) - (x^2 - 2x + 1) \\
 &= 4x^2 + 24x + 36 - x^2 + 2x - 1 \\
 &= 3x^2 + 26x + 35
 \end{aligned}$$

### Conseil

On développe les deux parenthèses simultanément, puis on fait attention au signe - devant la seconde parenthèse.

$$\begin{aligned}
 G &= \underbrace{\left( \frac{2}{3}x + \frac{2}{5} \right)^2}_{(a+b)^2} \\
 &= \left( \frac{2}{3}x \right)^2 + 2 \times \frac{2}{3}x \times \frac{2}{5} + \left( \frac{2}{5} \right)^2 \\
 &= \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{4}{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H &= \underbrace{\left( \frac{x}{5} + \frac{2}{3} \right) \left( \frac{x}{5} - \frac{2}{3} \right)}_{(a+b)(a-b)} \\
 &= \left( \frac{x}{5} \right)^2 - \left( \frac{2}{3} \right)^2 \\
 &= \frac{x^2}{25} - \frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

### Exercice 3

$$\begin{aligned}
 A &= x^2 + 4x + 4 \\
 &= \underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times x \times 2}_{2 \times a \times b} + \underbrace{2^2}_{b^2} \\
 &= \underbrace{(x + 2)^2}_{(a+b)^2}
 \end{aligned}$$

#### Méthode

On utilise l'égalité  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$  avec  $a = x$  et  $b = 2$ .

$$\begin{aligned}
 B &= x^2 - 4 \\
 &= \underbrace{x^2}_{a^2} - \underbrace{2^2}_{b^2} \\
 &= \underbrace{(x - 2)(x + 2)}_{(a-b)(a+b)}
 \end{aligned}$$

#### Méthode

On utilise l'égalité  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  avec  $a = x$  et  $b = 2$ .

$$\begin{aligned}
 C &= 25x^2 + 20x + 4 \\
 &= \underbrace{(5x)^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times 5x \times 2}_{2 \times a \times b} + \underbrace{2^2}_{b^2} \\
 &= \underbrace{(5x + 2)^2}_{(a+b)^2}
 \end{aligned}$$

#### Méthode

On utilise l'égalité  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$  avec  $a = 5x$  et  $b = 2$ .

$$\begin{aligned}
 D &= 4x^2 - 12x + 9 \\
 &= \underbrace{(2x)^2}_{a^2} - \underbrace{2 \times 2x \times 3}_{2 \times a \times b} + \underbrace{3^2}_{b^2} \\
 &= \underbrace{(2x - 3)^2}_{(a-b)^2}
 \end{aligned}$$

#### Méthode

On utilise l'égalité  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$  avec  $a = 2x$  et  $b = 3$ .

$$\begin{aligned}
 E &= (2x + 1)^2 - 9 \\
 &= \underbrace{(2x + 1)^2}_{a^2} - \underbrace{3^2}_{b^2} \\
 &= \underbrace{(2x + 1 + 3)(2x + 1 - 3)}_{(a+b)(a-b)} \\
 &= (2x + 4)(2x - 2)
 \end{aligned}$$

#### Méthode

On utilise l'égalité  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  avec  $a = 2x + 1$  et  $b = 3$ .

$$\begin{aligned}
 F &= x^2 - 2x + 1 \\
 &= \underbrace{x^2 - 2 \times x \times 1 + 1}_{a^2 - 2ab + b^2} \\
 &= \underbrace{(x - 1)^2}_{(a-b)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{9}{16}x^2 + x + \frac{4}{9} \\
 &= \underbrace{\left(\frac{3}{4}x\right)^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times \frac{3}{4}x \times \frac{2}{3}}_{2 \times a \times b} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^2}_{b^2} \\
 &= \underbrace{\left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}\right)^2}_{(a+b)^2}
 \end{aligned}$$

## Exercice 4

### Méthode pour mettre au même dénominateur

- On précise les valeurs interdites éventuelles en résolvant les équations "dénominateur = 0".
- On prend (bien souvent, mais pas tout le temps) comme dénominateur commun le produit des dénominateurs. N'oubliez pas par exemple que  $4 = \frac{4}{1}$ .
- On écrit les quotients avec les mêmes dénominateurs. Normalement vous savez le faire : on utilise  $\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$ .  
Par exemple  $\frac{4}{1} = \frac{4(x+9)}{1(x+9)}$ .
- On écrit la somme ou la différence sous la forme d'un seul quotient.
- On réduit le numérateur. Pas touche au dénominateur !

1. • Pour tout réel  $x$  différent de 0,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x} + 4 \\ &= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x} && \text{Mise au même dénominateur : } x \\ &= \frac{1+4x}{x} && \text{Un seul quotient.} \end{aligned}$$

### Pensez-y !

Précisez les valeurs interdites avant de commencer les calculs.

- Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ ,

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{x} + \frac{1}{x+1} + 1 \\ &= \frac{3(x+1)}{x(x+1)} + \frac{1x}{(x+1)x} && \text{Mise au même dénominateur : } x(x+1) \\ &= \frac{3(x+1)+1x}{x(x+1)} && \text{Un seul quotient.} \\ &= \frac{4x+3}{x(x+1)} && \text{plus joli comme ça.} \end{aligned}$$

### Valeurs interdites

Pour cette expression, il y a deux valeurs interdites :  $-1$  et  $0$ . Ce sont les valeurs qui annulent le dénominateur.

2. • Pour tout réel  $x$  différent de 5,

$$\begin{aligned} C &= \frac{x}{x-5} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{x \times 3}{(x-5) \times 3} + \frac{2 \times (x-5)}{3 \times (x-5)} && \text{Mise au même dénominateur : } 3(x-5) \\ &= \frac{3x}{x(x-5)} + \frac{2(x-5)}{3(x-5)} \\ &= \frac{3x+2(x-5)}{3(x-5)} && \text{Un seul quotient.} \\ &= \frac{5x-10}{3(x-5)} && \text{plus joli comme ça.} \end{aligned}$$

### Valeur interdite

Pour la trouver il fallait résoudre l'équation  $x-5=0$ ... ça va aller ?

3. Pour tout réel  $x$  différent de 1,

$$\begin{aligned} \frac{2x+5}{x-1} - 2 &= \frac{2x+5}{x-1} - \frac{2(x-1)}{x-1} && \text{Mise au même dénominateur : } x-1 \\ &= \frac{2x+5-2(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{2x+5-2x+2}{x-1} \\ &= \frac{7}{x-1} \end{aligned}$$

### Méthode

Pour montrer une égalité, une méthode consiste à partir d'un côté (d'un membre) de l'égalité et d'"arriver" à l'autre. Ici, on est parti de  $\frac{2x+5}{x-1} - 2$  et on est arrivé à  $\frac{7}{x-1}$ .