MATHEMATIQUES

Calculs algébriques et équations : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

Reconnaître avant de faire

Avant de résoudre une équation, il est important de savoir quelle est sa forme. En fonction de cela, on peut adopter la bonne méthode de résolution. Il y a trois types d'équation à reconnaître : équation du premier degré, équation produit nul et équation du type « $x^2 = a$ ».

a. $\underbrace{(2x+3)(x-5)}_{\text{Produit}} = \underbrace{0}_{\text{Nul}}$
est une équation de type n°2 : produit nul.

$$\begin{array}{rcr} 2x+3=0 & \text{ou} & x-5=0 \\ 2x=-3 & \text{ou} & x=5 \\ x=\dfrac{-3}{2} & \text{ou} & x=5 \end{array}$$

L'équation a deux solutions : $-\dfrac{3}{2}$ et 5.

b. $x^2-5=0$ est une équation de type n°3 : équation carré isolé.
$x^2-5=0$ s'écrit $\underbrace{x^2}_{\text{carré isolé}} = \underbrace{5}_{\text{nombre } a>0}$.

Cette équation a deux solutions : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

La méthode

On isole le carré en écrivant l'équation sous la forme $x^2 = a$.

Il y a deux nombres dont le carré vaut 5 : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

c. $-2(3-2x)-(2x+6)=0$ est une équation de type n°1 : premier degré.

$$\begin{array}{rcl} -2(3-2x)-(2x+6) & = & 0 \\ -6+4x-2x-6 & = & 0 \\ 2x-12 & = & 0 \\ 2x & = & 12 \\ x & = & \dfrac{12}{2} \\ x & = & 6 \end{array}$$

La méthode

On développe les produits et on se ramène à une équation du type $ax = b$.

La solution de l'équation est 6.

d. $9-x^2=25$ est une équation de type n°3 : équation carré isolé.

$$\begin{array}{rcl} 9-x^2 & = & 25 \\ -x^2 & = & 25-9 \\ -x^2 & = & 16 \\ x^2 & = & -16<0 \end{array}$$

Explications

Isoler le carré, c'est écrire l'équation sous la forme $x^2 = a$. Cette équation n'a pas de solution. Aucun nombre au carré ne donne un nombre négatif.

e. $(2x-9)(4-5x)=0$ est une équation du type n°2 : équation produit nul.

$$\begin{array}{rcl} 2x-9=0 & \text{ou} & 4-5x=0 \\ 2x=9 & \text{ou} & -5x=-4 \\ x=\dfrac{9}{2} & \text{ou} & x=\dfrac{-4}{-5} \\ x=\dfrac{9}{2} & \text{ou} & x=\dfrac{4}{5} \end{array}$$

Les solutions de l'équation sont $\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{2}$.

f. $3(1-4x)=6$ est une équation de type n°1 : premier degré.

$$\begin{array}{rcl} 3(1-4x) & = & 6 \\ 3-12x & = & 6 \\ -12x & = & 6-3 \\ -12x & = & 3 \\ x & = & \dfrac{3}{-12}=-\dfrac{1}{4} \end{array}$$

La solution de l'équation est $-\frac{1}{4}$.

Exercice 2

Méthode

Pour une équation du type $\frac{A}{B}=0$:

- On indique les valeurs interdites éventuelles (ces nombres ne peuvent pas être solution de l'équation).
- On utilise le résultat : **lorsque B est non nul** : $\frac{A}{B}=0 \Longleftrightarrow A=0$.
- On écrit les solutions de l'équation en vérifiant qu'il n'y a pas de valeur interdite.

Pour une équation du type $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$:

- On indique les valeurs interdites éventuelles (ces nombres ne peuvent pas être solution de l'équation).
- On utilise le résultat : **lorsque B et D sont non nuls** : $\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Longleftrightarrow A\times D=B\times C$.
- On résout l'équation ainsi obtenue.
- On écrit les solutions de l'équation en vérifiant qu'il n'y a pas de valeur interdite.

$\frac{3x+5}{x-9}=0$ est une équation du type $\frac{A}{B}=0$.

Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{9\}$:

Ne pas oublier

9 est une valeur interdite. Cela signifie que 9 ne peut pas être solution de cette équation.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{3x+5}{x-9} & = & 0 \\ 3x+5 & = & 0 \\ 3x & = & -5 \\ x & = & -\dfrac{5}{3} \end{array}$$

L'équation a une solution $-\frac{5}{3}$.

L'équation $\frac{6x}{x^2+1}=0$ est équation du type $\frac{A}{B}=0$.
Pour tout réel x :

Ne pas oublier

L'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution, donc on résout cette équation dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{6x}{x^2+1} & = & 0 \\ 6x & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}$$

L'équation a une solution 0.

L'équation $\dfrac{x^2-4}{x}=0$ est équation du type $\dfrac{A}{B}=0$.

Pour tout réel x différents de 0 :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2-4}{x} & = & 0 \\ x^2-4 & = & 0 \\ x^2 & = & 4 \\ x=2 & \text{ou} & x=-2 \end{array}$$

Equation $x^2=a$

Cette équation a deux solutions si $a>0$: $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

L'équation a deux solutions -2 et 2.

L'équation $\dfrac{x+6}{3-x}=2$ est équation du type $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$.

Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x+6}{3-x} & = & \dfrac{2}{1} \\ x+6 & = & 2\times(3-x) \\ x+6 & = & 6-2x \\ x+2x & = & 6-6 \\ 3x & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}$$

Méthode

On écrit l'égalité des produits en croix.

L'équation a une solution 0.

Exercice 3

1. a. L'expression du périmètre P en fonction de x est : $P=4x$.

b. L'expression de son aire A en fonction de x est : $A=x^2$.

L'idée

Puisque l'on a A en fonction de x et P en fonction de x, on écrit x en fonction de P et on remplace x par l'expression trouvée dans $A=x^2$ pour obtenir A en fonction de P.

c. Comme $P=4x$, on a $x=\dfrac{P}{4}$.

Ainsi, $A=x^2=\left(\dfrac{P}{4}\right)^2=\dfrac{P^2}{16}$.

En fait

Pour **a.** Dans l'égalité $U=e-rI$, on ajoute dans chaque membre rI et hop !
Pour **b.** On retranche e dans chaque membre puis on divise par $-r$ et encore hop !

2. a. De l'égalité $U=e-rI$, on déduit $e=U+rI$.

b. On a $e-rI=U$ d'où $-rI=U-e$ soit $I=\dfrac{U-e}{-r}=-\dfrac{U-e}{r}$.