MATHEMATIQUES
Droites et systèmes : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. • Pour $x = 0$ et $y = 2$, on obtient : $2 \times 0 - 3 \times 2 = -6$ donc $(0\ ;\ 2)$ n'est pas solution de l'équation.

Attention
L'ordre dans un couple a une importance. x est le premier nombre et y le second.

• Pour $x = -1$ et $y = \dfrac{-8}{3}$, on obtient : $2 \times (-1) - 3 \times \dfrac{-8}{3} = -2 + 8 = 6$, donc $\left(-1\ ;\ \dfrac{-8}{3}\right)$ est solution de l'équation.

• Pour $x = 3$ et $y = 0$, on obtient : $2 \times 3 - 3 \times 0 = 6$, donc $(3\ ;\ 0)$ est solution de l'équation.

Réponses : ☒ $\left(-1\ ;\ \dfrac{-8}{3}\right)$ et ☒ $(3\ ;\ 0)$.

2. $\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 5 \end{cases}$. En remplaçant y par 5 dans la première équation, on obtient $x + 5 = 0$ soit $x = -5$.
Le couple solution est donc $(-5\ ;\ 5)$.

Autrement
On pouvait également remplacer par les valeurs proposées et vérifier qu'un seul couple était solution.

Réponses : ☒ $(-5\ ;\ 5)$

3. En remplaçant y par $2x - 3$ dans la deuxième équation, on obtient $2x - 3 = x + 5$ soit $2x - x = 5 + 3$, d'où $x = 8$.
On a alors $y = 2 \times 8 - 3 = 13$.
On vérifie rapidement : $2 \times 8 - 3 = 13$ et $8 + 5 = 13$.
Le couple solution est donc $(8\ ;\ 13)$.

Petite remarque
La méthode de résolution exposée est la méthode de substitution.

Réponses : ☒ $(8\ ;\ 13)$

4. • Avec les cornets, le marchand gagne $(10 \times x)$ €.
• Avec les pots, il gagne $(15 \times y)$ €.
• Au total, il gagne 55 € , donc $10x + 15y = 55$.

En divisant par 5 les deux membres, on a $2x + 3y = 11$ et en divisant par 10, on a $x + 1,5y = 5,5$.

A savoir
Une équation peut s'écrire sous différentes formes.

Réponses : ☒ $10x + 15y = 55$ ☒ $2x + 3y = 11$ ☒ $x + 1,5y = 5,5$.

5. • $0 + 1 = 1$ et $0 = 0 \neq 1$ donc $(0\ ;\ 1)$ n'est pas solution du système **a.**.
• $0 + 5 \times 1 = 5$ et $0 + 1 = 1$ donc $(0\ ;\ 1)$ est solution du système **b.**.
• $3 \times 0 - 1 = -1$ et $0 + 1 = 1$ donc $(0\ ;\ 1)$ est solution du système **c.**.

Réponses : ☒ $\begin{cases} x + 5y = 5 \\ y = x + 1 \end{cases}$ ☒ $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Exercice 2

1. Vrai.

Equation cartésienne

Une équation de la forme $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne d'une droite dans le plan. Il y a une infinité de points sur une droite, non ?

L'équation $2x+y=0$ a une infinité de solutions. En effet, pour chaque valeur de x, il y a une valeur de y correspondante.

Par exemple, les couples $(0\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ -2)$, $(2\ ;\ -4)$ sont solutions de l'équation.

2. Vrai.

$1-3\times(-1)=1+3=4$.

3. Faux.

$2\times 5+3\times 0=10$ et $5+0=5\neq 0$. Les deux équations ne sont pas simultanément vérifiées, donc le couple n'est pas solution.

4. Vrai.

L'équation s'écrit $2x=-4y+6$ soit en divisant les deux membres par 2 : $x=-2y+3$.

5. Faux.

En remplaçant x par -1 dans l'équation, on obtient : $2\times(-1)+y=5$ soit $-2+y=5$, d'où $y=7\neq -7$.

6. Vrai.

On exprime y en fonction de x dans la première équation : $y=5-2x$ et on remplace (substitue) y par $5-2x$ dans la deuxième équation : $-x+2(5-2x)=-5$.
On obtient comme nouveau système :

$$\begin{cases} y=5-2x \\ -x+2(5-2x)=-5 \end{cases}$$

La deuxième équation devient une équation à une inconnue : x.

$$\begin{cases} y=5-2x \\ -5x+10=-5 \end{cases}$$

Dans cette deuxième équation, on isole les x dans le membre de gauche et les non x dans le membre de droite. On obtient :

$$\begin{cases} y=5-2x \\ -5x=-15 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y=5-2x \\ x=3 \end{cases}$$

On remplace x par 3 dans l'égalité $y=5-2x$ afin d'en déduire la valeur de y. On obtient :

$$\begin{cases} y=5-2\times 3 \\ x=3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Le couple $(3\ ;\ -1)$ est la solution du système. C'est bien un couple de nombres entiers.

Exercice 3

1. On remplace x par $\dfrac{7}{3}$ et y par $\dfrac{10}{3}$ dans les premiers membres des deux équations, puis on calcule :

$3\times\dfrac{7}{3}-6\times\dfrac{10}{3}=\dfrac{\cancel{3}\times 7}{\cancel{3}}-\dfrac{\cancel{3}\times 2\times 10}{\cancel{3}}=7-20=-13.$

$\dfrac{7}{3}-\dfrac{10}{3}=\dfrac{-3}{3}=-1.$

Les deux égalités sont vérifiées, on en déduit que le couple $\left(\frac{7}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\right)$ est solution du système.

2. Le couple $\left(\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{4}{3}\right)$ est solution du système. On en déduit que les égalités sont vérifiées avec $x = \frac{2}{3}$ et $y = -\frac{4}{3}$.
$5 \times \frac{2}{3} + 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$.
Le couple $\left(\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{4}{3}\right)$ vérifie la première égalité lorsque $a = \frac{2}{3}$.
$-2 \times \frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$.
Le couple $\left(\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{4}{3}\right)$ vérifie la deuxième égalité lorsque $b = 0$.

Exercice 4

- **Choix des inconnues :**

Soient x le nombre de garçons dans la classe et y le nombre de filles.

- **Mise en équation :**

* Dans la classe il y a 32 élèves. Le nombre total d'élèves est donnée par $x + y$. On en déduit l'équation $x + y = 32$.
* Le double du nombre de garçons est $2x$.Le triple du nombre de filles est $3y$.

La somme de ces deux nombres est donc $2x + 3y$. Elle vaut 69.
On en déduit l'équation $2x + 3y = 69$.

- **Résolution du système.**

$$\begin{cases} x + y = 32 & \boxed{\times(-2)} \\ 2x + 3y = 69 \end{cases}.$$

On résout ce système par combinaison.
On multiplie par -2 les deux membres de la première équation, puis en ajoutant membre à membre, on obtient :

Par substitution aussi

La méthode par substitution est aussi envisageable ici en exprimant y en fonction de x (ou x en fonction de y dans la première équation).

$$\begin{cases} -2x - 2y = -64 \\ 2x + 3y = 69 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (-2x - 2y) + (2x + 3y) = -64 + 69 \\ 2x + 3y = 69 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{-2x} - 2y + \cancel{2x} + 3y = -64 + 69 \\ 2x + 3y = 69 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 2x + 3y = 69 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 2x + 3 \times 5 = 69 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 2x = 54 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 27 \end{cases}$$

- **Vérification :** $27 + 5 = 32$ et $2 \times 27 + 3 \times 5 = 54 + 15 = 69$.

- **Conclusion :** Dans cette classe, il y a 5 filles et 27 garçons.

Exercice 5

1. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est naturellement un vecteur directeur de la droite (AB) :

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0-5 \\ 4-0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b. La droite (AB) admet pour équation cartésienne une équation du type $ax+by+c=0$ avec a, b et c trois réels non tous nuls. De plus le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

En identifiant les coordonnées de $\vec{u}$ avec $\overrightarrow{AB}$, on trouve donc $a=4$ et $b=5$.
On cherche donc le réel c tel que $4x+5y+c=0$:

$$\begin{aligned} A \in (AB) &\iff 4x_A + 5y_A + c = 0 \\ &\iff 4 \times 5 + 5 \times 0 + c = 0 \\ &\iff c = -20. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc $4x+5y-20=0$.

2. L'aire du triangle ACM est donnée par $\dfrac{AC \times MH}{2}$.
La hauteur MH est donnée par l'ordonnée du point M.
Le point M étant le point d'intersection des droites (AB) et (CD), ses coordonnées vérifient donc à la fois l'équation de (AB) et celle de (CD).
En utilisant l'équation de la droite (AB) trouvée dans la question **1.**, on obtient :

$$4 \times \frac{50}{13} + 5y - 20 = 0, \text{ soit } y = \frac{12}{13}.$$

L'aire du triangle AMC est donc $\dfrac{3 \times \frac{12}{13}}{2} = \dfrac{18}{13}$.

Remarque

On vous donne l'abscisse du point M. Inutile de la recalculer.... Je ne doute pas que vous savez le faire.

Remarques

En trouvant la valeur de y, on trouve la longueur MH qui sera bien utile pour calculer l'aire du triangle AMC.
La longueur AC est égale à 3. C'est peut-être pas la peine de faire un calcul pour ça !