

MATHÉMATIQUES

Les fractions Égyptiennes

1. Dans cette question, les calculs seront détaillés et les résultats donnés sous forme d'une fraction irréductible.

Calculer $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$.

2. Il y a plus de 3000 ans, les Égyptiens utilisaient uniquement, à l'exception de la fraction $\frac{2}{3}$, les fractions de la forme $\frac{1}{n}$, où n est un entier naturel non nul ainsi que les sommes $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \dots$ de plusieurs fractions de dénominateurs p, q, \dots , entiers naturels non nuls et tous différents.

Ainsi, la fraction $\frac{3}{7}$ s'écrivait $\frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$ et non pas $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$.

Comment obtenir l'écriture égyptienne d'une fraction quelconque $\frac{a}{b}$ strictement inférieure à 1 ?

Voici un algorithme, nommé algorithme de Fibonacci, permettant de répondre à cette question.

Dans cet algorithme, a et b désignent des entiers naturels non nuls.

- **Étape 1 :** À partir d'une fraction $\frac{a}{b}$ où $a < b$, déterminer le plus petit entier p tel que $p \geq \frac{b}{a}$.
Le mémoriser.
- **Étape 2 :** Calculer la différence $\frac{a}{b} - \frac{1}{p}$.
Si le résultat obtenu est différent de 0, reprendre l'étape 1 avec la fraction obtenue.
Sinon, passer à l'étape 3.
- **Étape 3 :** Écrire la décomposition de $\frac{a}{b}$ en la somme des inverses de tous les entiers p mémorisés.

Fraction $\frac{a}{b}$	Fraction $\frac{b}{a}$	Ecriture décimale de $\frac{b}{a}$ (au besoin arrondie à 0,01 près)	Entier p	Calcul de $\frac{a}{b} - \frac{1}{p}$
$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{11}$	$\simeq 1,09$	2	$\frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{11}{12} - \frac{6}{12} = \frac{5}{12}$
$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{5}$	2,4	3	$\frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12} - \frac{4}{12} = \frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{12}{1}$	12	12	$\frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$
Conclusion : $\frac{11}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$				

Utiliser l'algorithme de Fibonacci pour déterminer une écriture égyptienne de $\frac{25}{36}$ puis de $\frac{61}{84}$.
 Pour chacune de ces fractions, on présentera le déroulement de l'algorithme dans un tableau tel que celui donné en exemple.

3. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

a. Toute fraction admet une unique écriture égyptienne.

b. L'algorithme de Fibonacci conduit toujours à l'écriture égyptienne faisant intervenir le plus petit nombre de fractions.

4. On donne la formule suivante, valable pour tout entier naturel p :

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(2p+1)} = \frac{2}{2p+1}$$

a. Utiliser cette formule pour obtenir une écriture égyptienne de la fraction $\frac{2}{41}$ sans utiliser l'algorithme de Fibonacci.

b. Démontrer la formule.