MATHEMATIQUES

Les fractions Égyptiennes (corrigé)

1. Calculs des sommes .

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7} &= \frac{4\times 7}{3\times 4\times 7}+\frac{3\times 7}{4\times 3\times 7}+\frac{3\times 4}{4\times 3\times 7}\\ &= \frac{28}{84}+\frac{21}{84}+\frac{12}{84}\\ &= \frac{61}{84}\end{aligned}$$

Méthode

On met les fractions au même dénominateur. Le dénominateur commun pour la première somme est 84 et pour la seconde, c'est 36.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9} &= \frac{1\times 12}{3\times 12}+\frac{1\times 9}{4\times 9}+\frac{1\times 4}{9\times 4}\\ &= \frac{12}{36}+\frac{9}{36}+\frac{4}{36}\\ &= \frac{25}{36}\end{aligned}$$

2. • Algorithme de Fibonacci appliqué à la fraction $\frac{25}{36}$:

Fraction $\frac{a}{b}$	Fraction $\frac{b}{a}$	Ecriture décimale de $\frac{b}{a}$ (au besoin arrondie à 0,01 près)	Entier p	Calcul de $\frac{a}{b}-\frac{1}{p}$
$\frac{25}{36}$	$\frac{36}{25}$	$1,44$	2	$\frac{25}{36}-\frac{1}{2}=\frac{25}{36}-\frac{18}{36}=\frac{7}{36}$
$\frac{7}{36}$	$\frac{36}{7}$	$\simeq 5,14$	6	$\frac{7}{36}-\frac{1}{6}=\frac{7}{36}-\frac{6}{36}=\frac{1}{36}$
$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{1}$	36	36	$\frac{1}{36}-\frac{1}{36}=0$
Conclusion : $\frac{25}{36}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}$				

• Algorithme de Fibonacci appliqué à la fraction $\dfrac{61}{84}$:

Fraction $\dfrac{a}{b}$	Fraction $\dfrac{b}{a}$	Ecriture décimale de $\dfrac{b}{a}$ (au besoin arrondie à 0,01 près)	Entier p	Calcul de $\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{p}$
$\dfrac{61}{84}$	$\dfrac{84}{61}$	$\simeq 1,38$	2	$\dfrac{61}{84}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{61}{84}-\dfrac{42}{84}=\dfrac{19}{84}$
$\dfrac{19}{84}$	$\dfrac{84}{19}$	$\simeq 4,42$	5	$\dfrac{19}{84}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{95}{420}-\dfrac{84}{420}=\dfrac{11}{420}$
$\dfrac{11}{420}$	$\dfrac{420}{11}$	$\simeq 38,18$	39	$\dfrac{11}{420}-\dfrac{1}{39}=\dfrac{143}{5460}-\dfrac{140}{5460}=\dfrac{3}{5460}=\dfrac{1}{1820}$
$\dfrac{1}{1820}$	$\dfrac{1820}{1}$	1820	1820	$\dfrac{1}{1820}-\dfrac{1}{1820}=0$
Conclusion : $\dfrac{61}{84}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{39}+\dfrac{1}{1820}$				

3. a. Faux, l'écriture égyptienne d'une fraction n'est pas unique puisque nous en connaissons déjà deux différentes pour la fraction $\dfrac{25}{36}$ (celle obtenue en exécutant l'algorithme de Fibonacci et celle correspondant au calcul effectué à la question 1).

b. Faux, l'algorithme de Fibonacci ne conduit pas toujours à l'écriture faisant intervenir le plus petit nombre de fractions. En effet, dans le cas de la fraction $\dfrac{61}{84}$, l'écriture obtenue grâce à l'algorithme est une somme de quatre fractions alors même qu'il est possible d'écrire ce même nombre comme la somme de seulement trois fractions égyptiennes (voir question 1).

4. a. L'égalité prouvée à la question précédente est valable pour tout entier naturel p donc, en particulier, pour $p=20$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\frac{2}{41} &= \frac{2}{2\times 20+1}\\ &= \frac{1}{20+1}+\frac{1}{(20+1)(2\times 20+1)}\\ &= \frac{1}{21}+\frac{1}{21\times 41}\\ &= \frac{1}{21}+\frac{1}{861}\end{aligned}$$

Méthode

Un entier naturel est un entier positif. Le plus difficile est de trouver quelle valeur de p utiliser cette formule pour l'adapter à la fraction $\dfrac{2}{41}$.

b. Pour tout entier naturel p :

$$\begin{aligned}\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(2p+1)} &= \frac{1\times(2p+1)}{(p+1)(2p+1)}+\frac{1}{(p+1)(2p+1)} && \text{on met au même dénominateur.}\\ &= \frac{2p+2}{(p+1)(2p+1)}\\ &= \frac{2(p+1)}{(p+1)(2p+1)} && \text{on factorise par 2 au numérateur pour pouvoir simplifier le quotient.}\\ &= \frac{2}{2p+1} && \text{on a simplifié par } p+1\end{aligned}$$