MATHEMATIQUES

Quelques exercices de géométrie (mais pas que) : corrigé

Exercice 1

L'abscisse du point T est 87. Il rete donc à trouver son ordonnée. Pour cela, on pose $T(87\ ;\ y)$.

$A(27\ ;\ -49)$, $E(-25\ ;\ -10)$.

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-25-27)^2 + (-10-(-49))^2} \\ &= \sqrt{(-52)^2 + 39^2} \\ &= \sqrt{4225} \\ &= 65 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} AT &= \sqrt{(x_T - x_A)^2 + (y_T - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(87-27)^2 + (y-(-49))^2} \\ &= \sqrt{60^2 + (y+49)^2} \\ &= \sqrt{3600 + (y+49)^2} \end{aligned}$$

Comme $AT = AE$, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{3600 + (y+49)^2} & = & 65 & \\ 3600 + (y+49)^2 & = & 65^2 & \text{En utilisant le rappel.} \\ (y+49)^2 & = & 4225 - 3600 & \\ (y+49)^2 & = & 625 & \text{On reconnaît une équation du type } X^2 = A \text{ avec } A > 0 \\ y + 49 = \sqrt{625} & \text{ou} & y + 49 = -\sqrt{625} & \\ y + 49 = 25 & \text{ou} & y + 49 = -65 & \\ y = 25 - 49 & \text{ou} & y = -65 - 49 & \\ y = -24 & \text{ou} & y = -114 & \end{array}$$

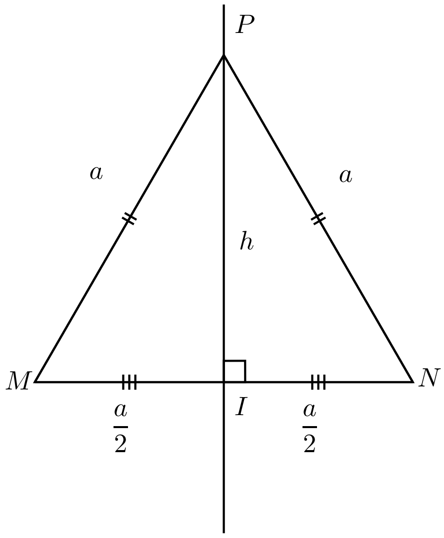
Comme $y > -49$ d'après l'énoncé, l'ordonnée du point T est -24.

Les coordonnées du point T sont : $(87\ ;\ -24)$.

Exercice 2

1. On note h la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a comme sur la figure ci-contre.
Dans le triangle MPI rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
MI^2 + IP^2 &= MP^2 \\
\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 &= a^2 \\
\frac{a^2}{4} + h^2 &= a^2 \\
h^2 &= a^2 - \frac{a^2}{4} \\
h^2 &= \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \\
h^2 &= \frac{3a^2}{4} \\
h &= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \\
h &= a\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$



2. $(B\ ;\ C\ ;\ A)$ est un repère orthonormé car $(BA) \perp (BC)$ et $AB = BC$ ($ABCD$ est un carré).

3. En utilisant la question 1., on obtient : $E\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

4. Calcul de AE, EF et AF :

$$\begin{aligned}
AE &= \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} \qquad \text{On développe } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 \text{ avec l'égalité remarquable.} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \sqrt{3} + 1} \\
&= \sqrt{2 - \sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EF &= \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} \\
&= \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \qquad \text{On a } 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{4}} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AF &= \sqrt{(x_F - x_A)^2 + (y_F - y_A)^2} \\
&= \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \\
&= \sqrt{2 + \sqrt{3}}
\end{aligned}$$

5. Développement de $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \times \sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2-\sqrt{3}} + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= 2 + \cancel{\sqrt{3}} - 2 \times \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2 - \cancel{\sqrt{3}} \\
&= 4 - 2\sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} \\
&= 4 - 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

6. Les points A, E et F sont alignés si $AE + EF = AF$ soit $EF = AF - AE$ ou encore $EF^2 = (AF - AE)^2$.

Or, $EF^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ et $(AF - AE)^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2$.

Par conséquent, $EF^2 = (AF - AE)^2$ et donc les points A, E et F sont alignés.

Exercice 3

On utilise le théorème de Thalès dans le triangle ABC.
Comme $(GF) \perp (BC)$, (GF) et (AB) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CG}{CA} = \frac{CF}{CB} = \frac{GF}{AB}$$

On obtient la valeur de AC en utlisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ADC :

$$\begin{aligned}
AD^2 + DC^2 &= AC^2 \\
AC^2 &= 5^2 + 10^2 \\
AC^2 &= 125 \\
AC &= \sqrt{125} \\
AC &= 5\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Pensez-y !

C'est toujours plus sympa d'écrire $5\sqrt{5}$ plutôt que $\sqrt{125}$..... je ne vais quand même vous expliquer comment faire ?

En notant $x = CG$ dans les égalités de quotients, on obtient :

$$\boxed{\frac{x}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{5}} = \frac{GF}{AB}$$

Avec les quotients encadrés par produit en croix, on obtient :

$$\begin{aligned}
5 \times x &= 2 \times 5\sqrt{5} \\
x &= 2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$CG = 2\sqrt{5}$ et comme $AG = AC - CG$, alors $AG = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.