MATHEMATIQUES
Exercice sur les nombres premiers (corrigé)

1. Le nombre p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. Il est donc impair. Par conséquent, $p+1$ et $p-1$ sont pairs et donc divisibles par 2. On en déduit que a et b sont des entiers.

2. a. Calcul de $a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(p+1)^2}{4} - \frac{(p-1)^2}{4} \\
&= \frac{p^2+2p+1}{4} - \frac{p^2-2p+1}{4} \\
&= \frac{p^2+2p+1-(p^2-2p+1)}{4} \qquad \text{Attention au signe - devant la parenthèse...} \\
&= \frac{\cancel{p^2}+2p+\cancel{1}-\cancel{p^2}+2p-\cancel{1}}{4} \\
&= \frac{4p}{4} \\
&= p
\end{aligned}$$

b. D'après la question précédente, tout nombre p premier supérieur ou égal à 3 s'écrit sous la forme $a^2 - b^2$ avec a et b entiers. Ainsi, on vient de démontrer que tout nombre premier supérieur ou égal à 3 s'écrit sous la forme d'une différence de deux carrés d'entiers.

3. • Avec 23 :

$a = \dfrac{23+1}{2} = 12$ et $b = \dfrac{23-1}{2} = 11$.
Ainsi,

$$23 = 12^2 - 11^2$$

• Avec 37 :

$a = \dfrac{37+1}{2} = 19$ et $b = \dfrac{37-1}{2} = 18$.
Ainsi,

$$37 = 19^2 - 18^2$$