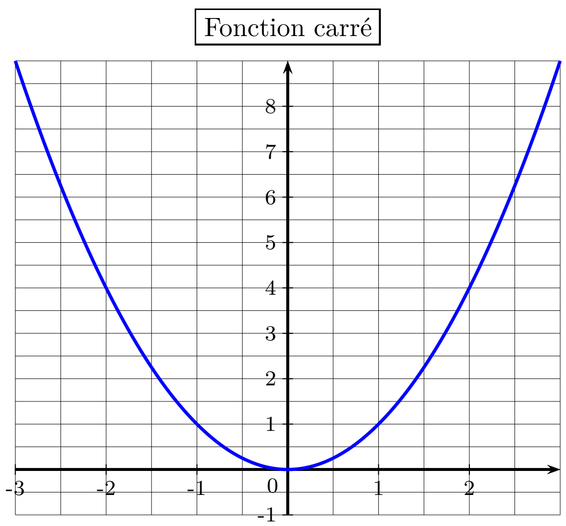
MATHEMATIQUES

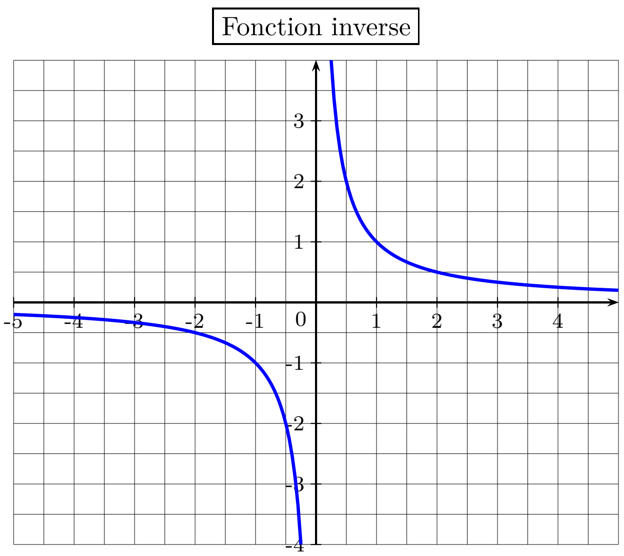
Généralités sur les fonctions. Fonctions de référence : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

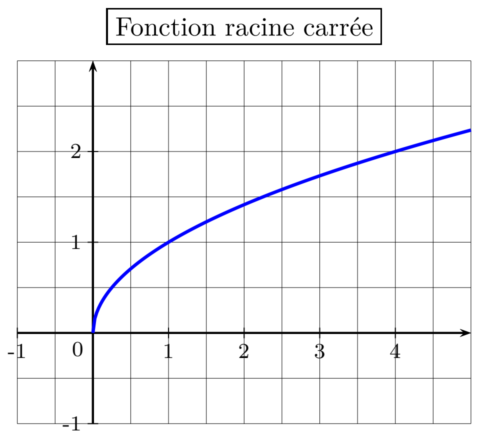
Exercice 1

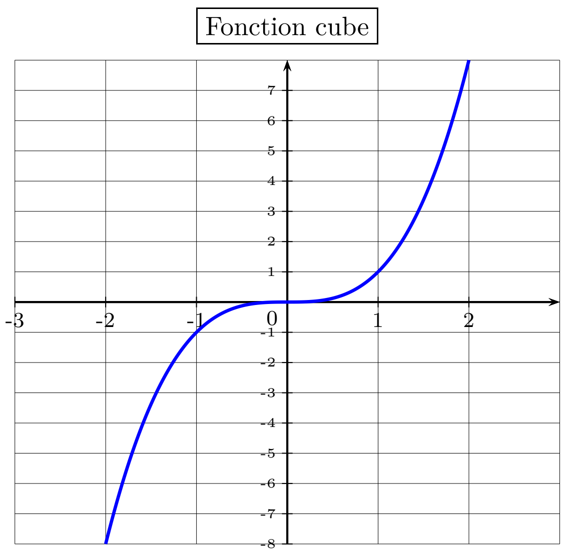
A connaître

Elles s'appellent fonctions de référence.... et ce n'est pas pour rien ! Il est essentiel de les connaître parfaitement..... courbe, tableaux de variations, signe ..... de savoir les utiliser. A partir de ces fonctions, on peut "fabriquer" d'autres fonctions qui vont avoir des caractéristiques communes. Par exemple, la fonction $x \longmapsto 2x^2 + 6$ est une fonction qui est construite à partir de la fonction carré. Cela signifie, par exemple, qu'à partir de la fonction carré, on peut en déduire le sens de variation de cette fonction.



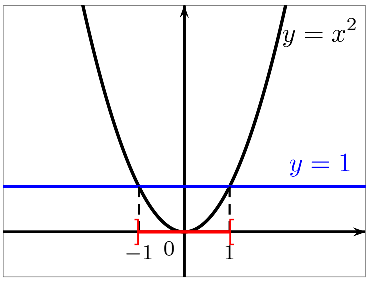






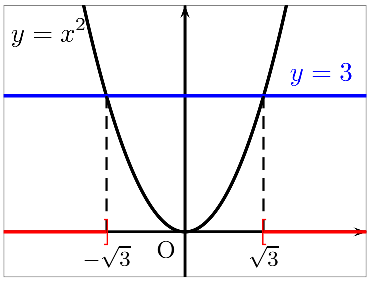
Exercice 2

Résolutions graphiques des inéquations.



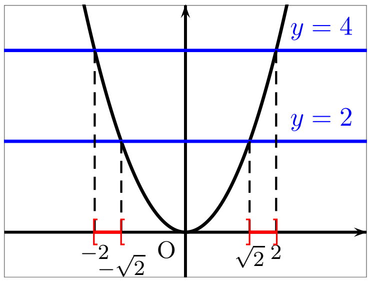
$x^2 < 1$

$\mathscr{S}_1 =]-1\ ;\ 1[$



$x^2 \geqslant 3$

$\mathscr{S}_2 =]-\infty\ ;\ -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$

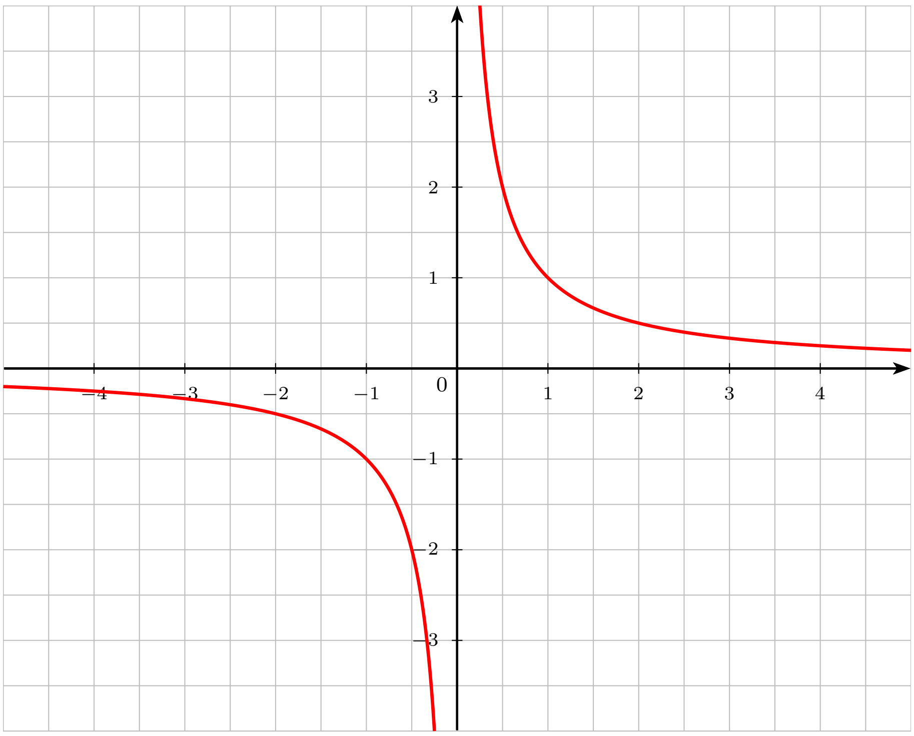


$2 < x^2 \leqslant 4$

$\mathscr{S}_3 = [-2\ ;\ -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}\ ;\ 2]$

Exercice 3

1. La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.



2. La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f(-5) = \dfrac{1}{-5} = -0,2$. Ainsi, l'image de l'abscisse est l'ordonnée du point. On en déduit que la point A est bien sur la représentation graphique.

Point sur une courbe

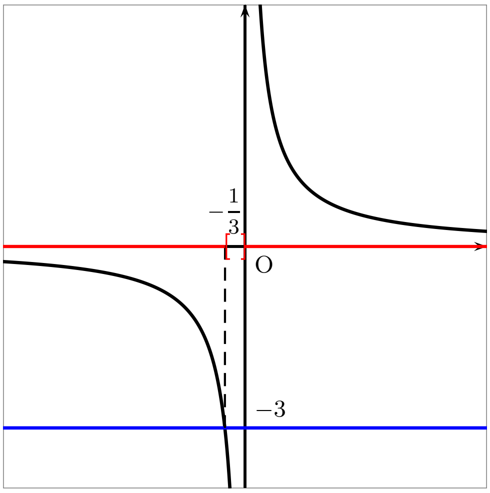
A quelles conditions un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est-il sur la courbe $\mathscr{C}_f$? Deux choses : x doit être dans l'ensemble de définition et y doit être l'image de x par f. On doit donc avoir l'égalité $y = f(x)$.

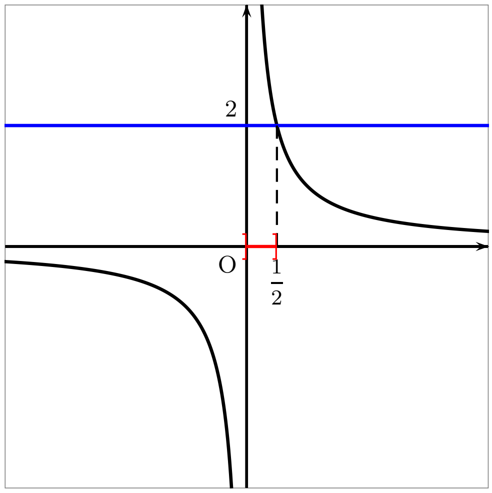
Remarque

0 est le seul réel qui n'a pas d'inverse. En effet, si 0 avait un inverse, alors il existerait un réel a tel que $a \times 0 = 1$. Or $a \times 0 = 0$, on obtient donc l'égalité $0 = 1$. Ce qui est faux (vous le savez !). Donc 0 n'a pas d'inverse. Ce raisonnement porte le nom de raisonnement par l'absurde.

3. L'ensemble de définition de la fonction inverse est $\mathbb{R}^*$.

4. Résolutions des inéquations :





$$\frac{1}{x} > -3$$

$$\mathscr{S} = \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{3}\right[\cup]0\ ;\ +\infty[$$

Attention !

0 est une valeur interdite. Il doit être exclu de l'ensemble des solutions.

$$\frac{1}{x} \geqslant 2$$

$$\mathscr{S} = \left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$$

Exercice 4

1. La fonction h étant la fonction racine carré,

$$\left.\begin{array}{l} h(8) + h(32) = \sqrt{8} + \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ h(72) = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \end{array}\right\} \text{donc } h(8) + h(32) = h(72)$$

Calcul

Pour simplifier une racine carrée, on fait apparaître un carré parfait (4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; ....)
Et utiliser si a et b sont positifs : $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$.
$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$.
$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$.
$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$

2. a. $\sqrt{81} = 9$.

b. $\sqrt{(-7)^2} = |(-7)| = 7$

Petit rappel

On a vu que pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.
N'oubliez pas que la racine carrée d'un nombre est un nombre positif.

c. Solution de l'équation $\sqrt{x} = 2$.

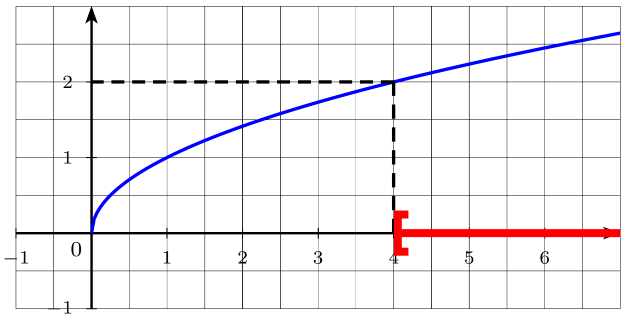
On cherche le nombre dont la racine carrée vaut 2. C'est bien sûr 4.
L'équation $\sqrt{x} = 2$ a pour unique solution 4.

Equation $\sqrt{x} = a$

Si $a \geqslant 0$, cette équation a une unique solution : a^2.
Si a est négatif, cette équation n'a pas de solution.

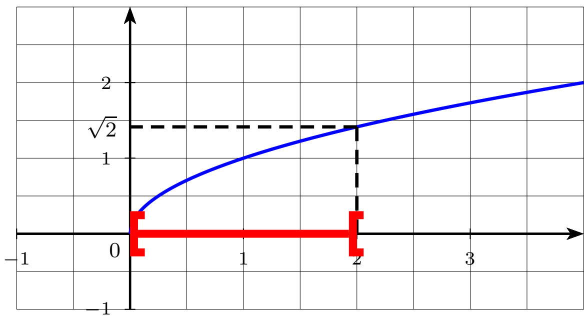
d. $f(100) = 10\sqrt{100} = 10 \times 10 = 100$.

e. Avec la représentation graphique :



L'inéquation $\sqrt{x} \geqslant 2$ a pour solution $[4\ ;\ +\infty[$.

f. Avec la représentation graphique :



L'inéquation $\sqrt{x} < \sqrt{2}$ a pour solution $[0\ ;\ 2[$.

Attention !

L'ensemble de définition de la fonction racine carrée est $[0\ ;\ +\infty[$, donc pas de solutions négatives !

g. L'ordonnée du point de la courbe de la fonction racine carrée est $\sqrt{10}$.

h. C'est faux ! Si a est strictement négatif, cette équation n'a pas de solution.

3. a. $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.

b. $-2^2 = -2 \times 2 \times 2 = -8$

Bizarre ?

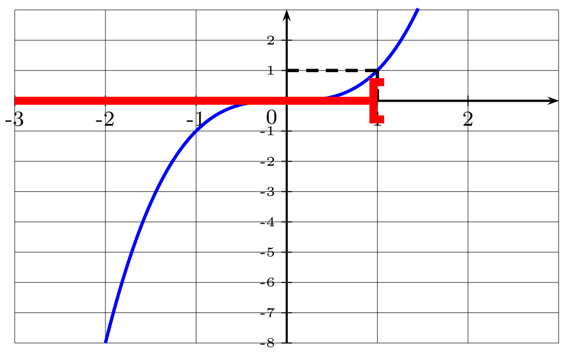
On obtient le même résultat mais les calculs sont différents. Dans l'un c'est (-2) qui est au cube, dans l'autre, c'est 2.

c. On cherche le nombre dont le cube est -1. Eh bien c'est -1.
L'équation $x^3 = -1$ a pour solution -1.

Equation $x^3 = a$

Cette équation a une solution unique quelque soit la valeur de a.

d. Avec la représentation graphique :



L'inéquation $x^3 < 1$ a pour solution $]-\infty\ ;\ 1[$.

e. $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.