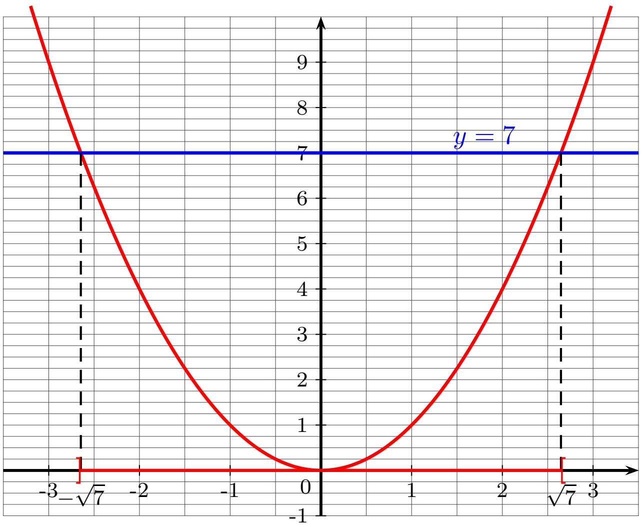
MATHEMATIQUES
Généralités sur les fonctions. Fonctions de référence : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. Représentation graphique de la fonction carré.



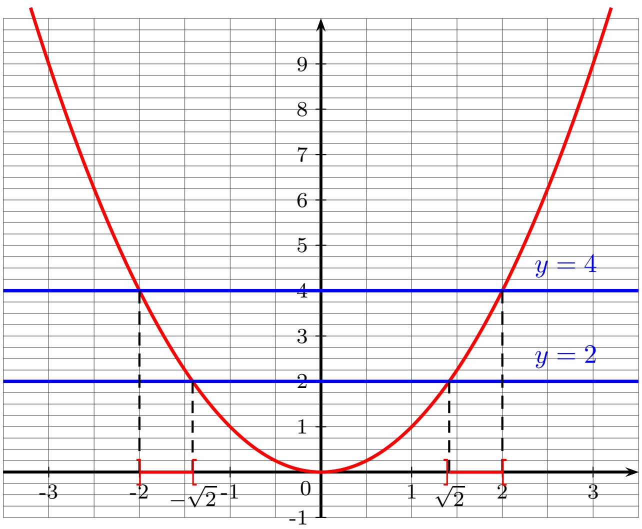
2. Utilisation de la représentation graphique.

a. Inéquation $x^2 < 7$.
On trace la droite d'équation $y = 7$ et on lit les solutions sur l'axe des abscisses (voir graphique ci-dessus).

Explications
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés strictement en dessous de la droite d'équation $y = 7$.

b. Ensemble des réels qui vérifient $2 < x^2 < 4$.
On trace les droites d'équation $y = 2$ et $y = 4$ et on lit les solutions sur l'axe des abscisses (voir graphique ci-dessous).

Explications
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés entre les droites d'équation $y = 2$ et $y = 4$.



$\mathscr{S} =]-2\ ;\ -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}\ ;\ 2[$.

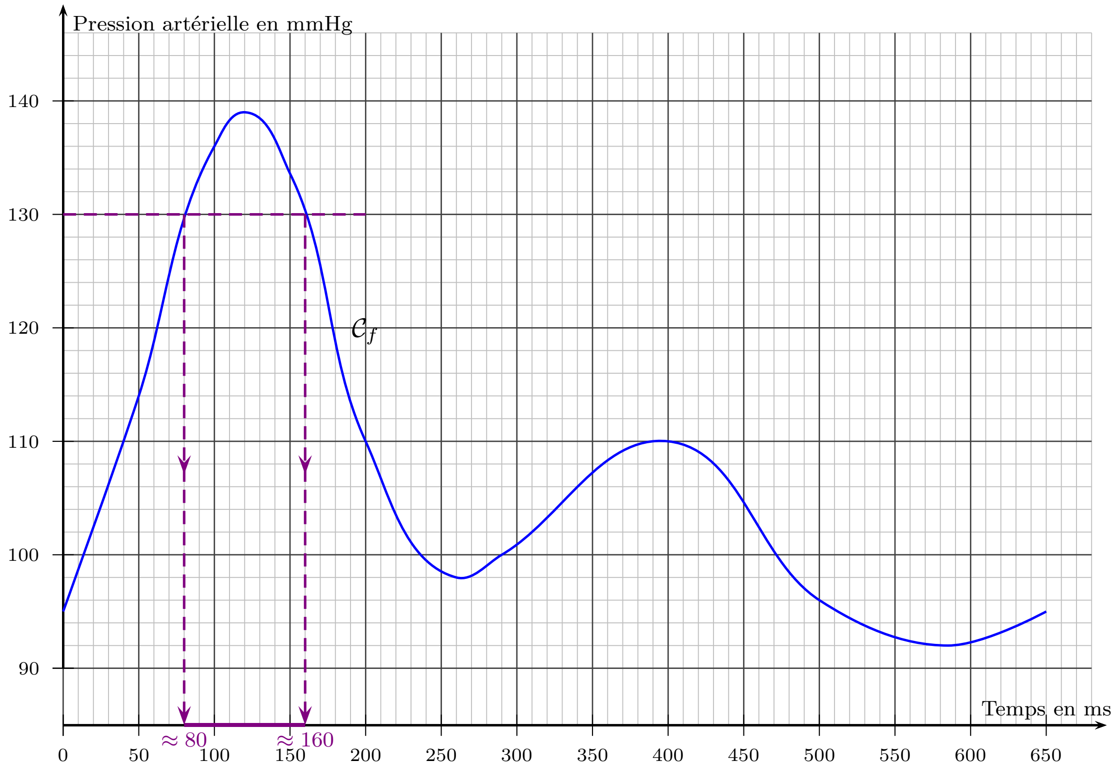
c. L'affirmation de Nabolos est fausse.

En effet $(-5)^2 = 25 \geqslant 9$ et pourtant -5 n'est pas supérieur à 3.

Contre exemple

Pour prouver qu'une affirmation est fausse, il suffit d'exhiber une contre exemple. -5 vérifie bien l'hypothèse $x^2 \geqslant 9$, mais ne vérifie pas la conclusion.
Vous pouvez vous aider de la courbe en traçant la droite d'équation $y = 9$. Regardez les points de la courbe qui sont au-dessus de cette droite sur le côté gauche.

Exercice 2



1. La pression artérielle est supérieure ou égale à 130 mmHg sur l'intervalle [80 ; 160].

2. **a.** La valeur systolique mesurée, c'est-à-dire la valeur maximale de la pression artérielle est d'environ 139.

b. La valeur diastolique mesurée est 92.

c. Un patient est en hypertension artérielle lorsque la pression systolique est supérieure ou égale à 140 mmHg ou que la pression diastolique est supérieure ou égale à 92 mmHg.
Ce patient est en hypertension puisque sur l'intervalle la pression diastolique est supérieure à 90 mmHg.

3. D'après cet examen, nous pouvons estimer que le patient ne souffre pas de tachycardie.
Un battement dure 0,650 s, par conséquent dans 60 s il y aura $\dfrac{60}{0{,}650}$ battements soit environ 92 battements par minute. Il y en a donc strictement moins de 100.

Exercice 3

Bien comprendre

Prenez la temps de bien comprendre cette formule :

$$\underbrace{f(t)}_{\text{Temp. en °C}} = \frac{5}{9}\underbrace{t}_{\text{Temp. en °F}} - \frac{160}{9}$$

1. On cherche une température en °C. On calcule l'image de 32 par f.

$f(32) = \frac{5}{9} \times 32 - \frac{160}{9} = \frac{160}{9} - \frac{160}{9} = 0.$

On en déduit que 32°F=0°C.
Le point de solidification de l'eau est bien 32°F.

2. On cherche encore une température en °C. On calcule l'image de 212 par f :

$f(212) = \frac{5}{9} \times 212 - \frac{160}{9} = \frac{1060}{9} - \frac{160}{9} = \frac{900}{9} = 100.$
Ainsi, l'eau bout à 212 °F.

3. On cherche une température en °F. On calcule l'antécédent de 37 par f :

$$\begin{aligned}
\frac{5}{9}t - \frac{160}{9} &= 37 \\
\frac{5}{9}t &= 37 + \frac{160}{9} \\
\frac{5}{9}t &= \frac{333}{9} + \frac{160}{9} \\
\frac{5}{9}t &= \frac{493}{9} \\
t &= \frac{493}{9} \div \frac{5}{9} \\
t &= \frac{493}{9} \times \frac{9}{5} && \text{Diviser revient à multiplier par l'inverse.} \\
t &= \frac{4437}{45} \\
t &= 98,6
\end{aligned}$$

Conclusion : 37 °C = 98,6°F.

4. Résolution de l'équation :

$$\begin{aligned}
\frac{5}{9}t - \frac{160}{9} &= t \\
\frac{5}{9}t - t &= \frac{160}{9} \\
\frac{5}{9}t - \frac{9}{9}t &= \frac{160}{9} \\
\frac{-4}{9}t &= \frac{160}{9} \\
t &= \frac{160}{9} \div \frac{-4}{9} \\
t &= \frac{160}{9} \times \frac{9}{-4} && \text{Diviser revient à multiplier par l'inverse.} \\
t &= \frac{1440}{-36} \\
t &= -40
\end{aligned}$$

Conclusion : -40 °C=-40 °F.

Exercice 4

- Expression de $f(x)$:

$$f(x) = \underbrace{2^2}_{\substack{\text{Aire du}\\ \text{carré}\\ \text{AEFG}}} + \underbrace{6 \times x}_{\substack{\text{Aire du}\\ \text{rectangle}\\ \text{EMND}}} = 4 + 6x$$

- Expression de $g(x)$:

$$g(x) = \underbrace{6^2}_{\substack{\text{Aire du}\\ \text{carré}\\ \text{BCDE}}} - \underbrace{6 \times x}_{\substack{\text{Aire du}\\ \text{rectangle}\\ \text{EMND}}} = 36 - 6x$$

- Calcul de x pour que les surfaces aient la même aire :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) \\ 4 + 6x & = & 36 - 6x \\ 6x + 6x & = & 36 - 4 \\ 10x & = & 32 \\ x & = & \dfrac{32}{10} \\ x & = & 3,2 \end{array}$$

Les aires sont égales pur $x = 3,2$ cm.

Exercice 5

1. L'aire du trapèze est donnée par la différence de l'aire du carré $ABCD$ avec celle du triangle AMD.

L'aire du carré est 36 unités d'aire.
L'aire du triangle AMD est $\dfrac{x \times 6}{2} = 3x$.

L'aire du trapèze est donc : $36 - 3x$.

> **Aire d'un trapèze et d'un triangle**
>
> L'aire d'un trapèze de base B et b et de hauteur h est donnée par $\dfrac{(b+B) \times h}{2}$. On pouvait utiliser cette formule.... mais pour cela, il faut la connaître ! En revanche, celle d'un triangle est à connaître : $\dfrac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2}$.

2. Résolution de l'inéquation.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \leqslant & 24 \\ 36 - 3x & \leqslant & 24 \\ -3x & \leqslant & 24 - 36 \\ -3x & \leqslant & -12 \\ x & \geqslant & \dfrac{-12}{-3} \\ x & \geqslant & 4 \end{array}$$

Si $x \geqslant 4$, alors $f(x) \leqslant 24$.

> **Remarque**
>
> x est un nombre inférieur ou égal à 6.