MATHEMATIQUES
Intervalles et inégalités : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. Le périmètre d'un rectangle est donné par $(2 \times \text{longueur}) + (2 \times \text{largeur}) = 2L + 2\ell$.

- Comme $12,3 < L < 12,4$, alors $2 \times 12,3 < 2L < 2 \times 12,4$ soit $24,6 < 2L < 24,8$;
- Comme $4,5 < \ell < 4,6$, alors $2 \times 4,5 < 2\ell < 2 \times 4,6$ soit $9 < 2\ell < 9,2$.
- Comme le périmètre P est donné par $P = 2L + 2\ell$, on en déduit que $24,6 + 9 < 2L + 2\ell < 24,8 + 9,2$ soit :

$$33,6 < P < 34$$

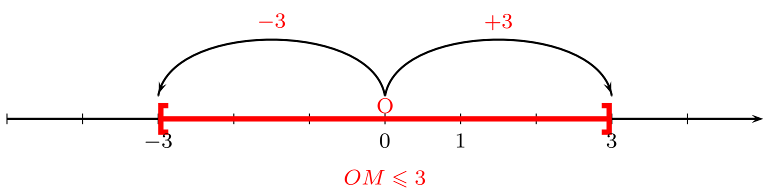
2. $1,0449 < 1,045 < 1,0451$ $\quad$ $2,3015 < 2,30154 < 2,3016$ $\quad$ $0,9999 < 1 < 1,0001$

3. Les diviseurs de 24 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24.
On résout l'inéquation vérifiée par a :

$$\begin{array}{rcll}
3(a-1)-(-2a-5) & < & 2(a+15)-1 & \text{Attention au signe } - \text{ devant la parenthèse.} \\
3a-3+2a+5 & < & 2a+30-1 & \\
5a+2 & < & 2a+29 & \\
5a-2a & < & 29-2 & \\
3a & < & 27 & \\
a & < & \dfrac{27}{3} & \\
a & < & 9 &
\end{array}$$

On cherche donc les entiers naturels diviseurs de 24, non premiers et solution de l'inéquation précédente donc inférieur à 9.
Il y a 1 ; 4 et 6. Vous en voyez d'autres ? oui ? 8 ? on le rajoute alors à la liste des solutions !

4. a. Résolution de $|x| \leqslant 3$:
Dire que $|x| \leqslant 3$ signifie que la distance de x à 0 est inférieure ou égale à 3.
Sur un graphique, on fait apparaître les points M qui vérifient donc : $OM \leqslant 3$.



Le conseil
Après avoir traduit l'inéquation à résoudre en termes de distance, aidez-vous d'un graphique pour trouver les solutions ou bien utiliser le résultat de cours :
$|x-a| \leqslant r$ équivaut à $x \in [a-r\ ;\ a+r]$
Résultat que vous pouvez essayer de démontrer d'ailleurs !

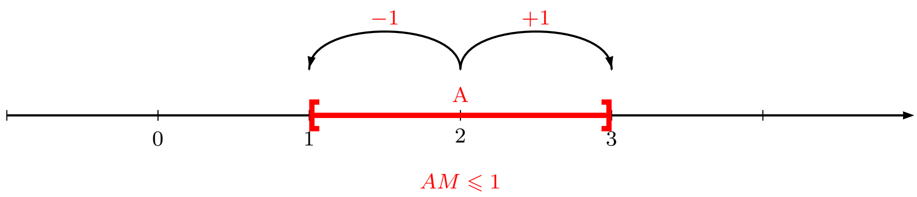
L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.

b. Résolution de $|x-2| \leqslant 1$:
Dire que $|x-2| \leqslant 1$ signifie que la distance de x à 2 est inférieure ou égale à 1.

On note A le point d'abscisse 2 et on représente les points M qui vérifient $AM \leqslant 1$ (traduction graphique de l'inéquation $|x-2| \leqslant 1$).

Petit rappel

Si x et y sont les abscisses de deux points M et N d'une droite graduée, on a $MN = |x-y|$. Donc ici, $AM = |x-2|$.



L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc l'intervalle : $[1\ ;\ 3]$.

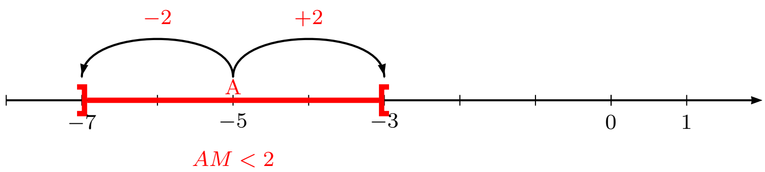
c. Résolution de $|x+5| < 2$:

Dire que $|x+5| < 2$ signifie que la distance de x à (-5) est inférieure strictement à 2.

Le moins moins

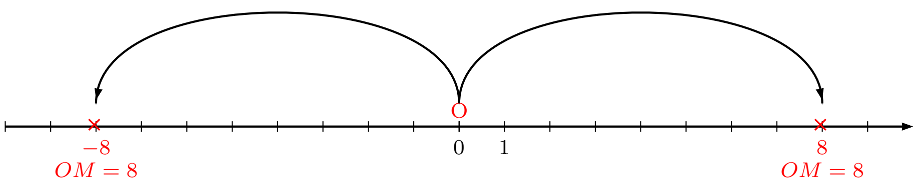
Pour traduire la valeur absolue comme une distance, on écrit $|x+5| = |x-(-5)|$ et par suite $|x-(-5)| = AM$ avec A le point d'abscisse 5 et le tour est joué !

On note A le point d'abscisse (-5) et on représente les points M qui vérifient $AM \leqslant 2$ (traduction graphique de l'inéquation $|x+5| \leqslant 2$).



L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc l'intervalle : $]-7\ ;\ -3[$.

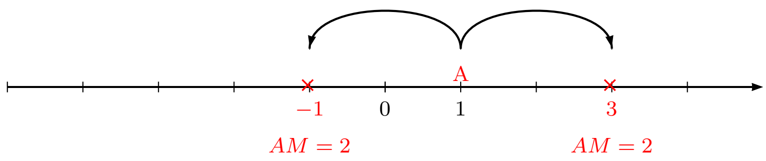
5. • Ensemble de solutions de l'équation $|x| = 8$.
Dire que $|x| = 8$ signifie que la distance de x à 0 est égale à 8.
Sur un graphique, on fait apparaître les points M qui vérifient donc : $OM = 8$.



L'équation $|x| = 8$ a donc pour ensemble de solutions : $\{-8\ ;\ 8\}$.

- Ensemble de solutions de l'équation $|x-1|=2$.

Dire que $|x-1|=2$ signifie que la distance de x à 1 est égale à 2.
Sur un graphique, on fait apparaître les points M qui vérifient donc : $AM=2$ avec A le point d'abscisse 1.



L'équation $|x-1|=2$ a donc pour ensemble de solutions : $\{-1\ ;\ 3\}$.

6. Comme $4<5<9$, alors $2<\sqrt{5}<3$ et par suite $\sqrt{5}<4$.
On en déduit que $\sqrt{5}-4<0$.

Par conséquent $|\sqrt{5}-4|=-(\sqrt{5}-4)=\underbrace{4-\sqrt{5}}_{\text{Il n'y a plus de valeur absolue}}$

Attention

La valeur absolue d'un nombre c'est lui-même s'il est positif mais c'est son opposé s'il est négatif. Et là ? Il est positif ou négatif ?

7.

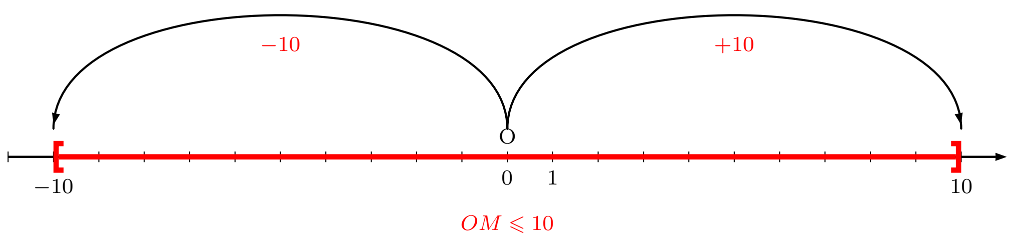
Méthode

"Traduire un intervalle par une valeur absolue", revient à trouver une inégalité du type $|x-a|\leqslant r$ avec a centre de l'intervalle et r son rayon. Il faut donc trouver ces deux nombres :

- Le centre est donné par : $\dfrac{a+b}{2}$.
- Le rayon de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ est donné par : $\dfrac{b-a}{2}$.

a. Traduction de $x\in[-10\ ;\ 10]$:

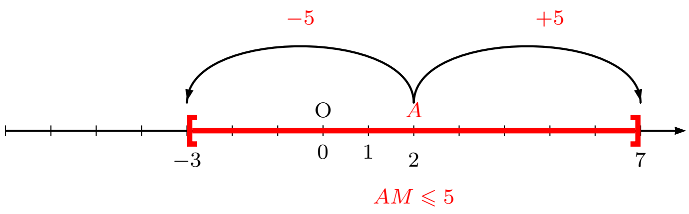
- Le centre de l'intervalle est 0 car $\dfrac{-10+10}{2}=0$.
- Son rayon est donné par $r=\dfrac{10-(-10)}{2}=10$.



Ainsi, $x\in[-10\ ;\ 10]$ équivaut à $|x|\leqslant 10$.

b. Traduction de $x \in [-3\ ;\ 7]$:

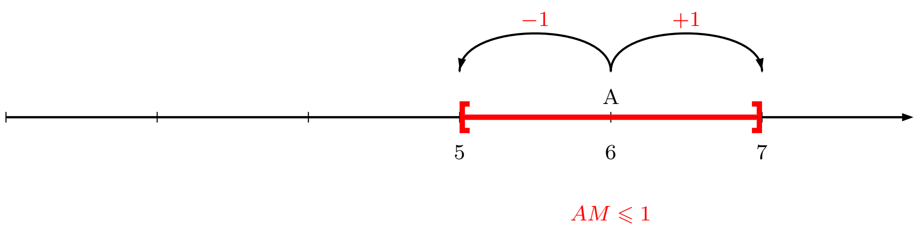
- Le centre de l'intervalle est 2 car $\dfrac{7+(-3)}{2} = 2$.
- Son rayon est donné par $r = \dfrac{3-(-7)}{2} = 5$.



Ainsi, $x \in [-3\ ;\ 7]$ équivaut à $|x-2| \leqslant 5$.

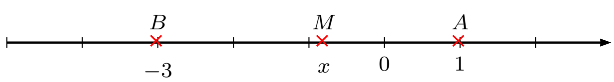
c. Traduction de $x \in [5\ ;\ 7]$:

- Le centre de l'intervalle est 6 car $\dfrac{5+7}{2} = 6$.
- Son rayon est donné par $r = \dfrac{7-5}{2} = 1$.



Ainsi, $x \in [5\ ;\ 7]$ équivaut à $|x-6| \leqslant 1$.

8. Expression des distances.



$$AM = |x-1| \qquad BM = |x-(-3)| = |x+3|$$

9. Encadrement de $\dfrac{1+A}{2}$.

$$\begin{array}{rcl}
2,236 & < A < & 2,237 \\
1+2,236 & < 1+A < & 2,237+1 \\
3,236 & < 1+A < & 3,237 \\
\dfrac{3,236}{2} & < \dfrac{1+A}{2} < & \dfrac{3,237}{2} \\
1,618 & < \dfrac{1+A}{2} < & 1,6185
\end{array}$$

10. a. Si on note s la masse du sac, on a $2,5 \leqslant s \leqslant 2,8$.
Si on note ℓ la masse des livres, on a $3 \leqslant \ell \leqslant 4,5$.
On en déduit que le sac plein a une masse $s+\ell$ telle que :

$$2,5+3 \leqslant s+\ell \leqslant 2,8+4,5 \quad \text{soit} \quad 5,5 \leqslant s+\ell \leqslant 7,3$$

b. 700 g = 0,7 kg et 800 g = 0,8 kg.

Si on note r la masse retirée du sac, on a $0,7 \leqslant r \leqslant 0,8$.
Ainsi, $-0,8 \leqslant -r \leqslant -0,7$.
Si on note p la masse du sac allégé, on a :

$$5,5-0,8 \leqslant p \leqslant 7,3-0,7 \quad \text{soit} \quad \boxed{4,5 \leqslant p \leqslant 6,6}$$

Astuce

Le cours dit que : si $a < b$ et $c < d$ alors $a+c < c+d$.
On a aussi $-c > -d$ soit $-d < -c$ et ainsi : $a+(-d) < b+(-c)$ soit $a-d < b-c$.

Exercice 2

1. Vrai. 100 est un nombre positif. Donc on ne change pas le sens de l'inégalité lorsqu'on divise par 100.

2. Faux. On ne change pas le sens de l'inégalité quand on ajoute ou retranche le même nombre dans les deux membres de l'inégalité.

3. Vrai. En multipliant par (-1) les deux membres de l'inéquation $-x < 0$, on obtient $(-1)\times(-x) > 0\times(-1)$ soit $x > 0$.

Astuce

$-x$ est un nombre strictement négatif lorsque x est strictement positif.

4. Faux. Pour $x = 0$, $x^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$ et $-1 > -2$. Donc 0 n'est pas solution de l'inéquation.

5. Vrai. Le carré de n'importe quel nombre donne toujours un nombre positif. Donc pour tous les nombres x, $x^2 \geqslant 0$. On en déduit que $x^2+1 \geqslant 0+1$, soit $x^2+1 \geqslant 1 > 0$.

6. Vrai. Le carré de n'importe quel nombre donne toujours un nombre positif. Donc pour tous les nombres x, $x^2 \geqslant 0$.

7. Vrai. Les solutions de cette inéquation sont les nombres x qui vérifient $x \geqslant -1$. En particulier, les nombres positifs sont donc solutions car $x \geqslant -1 \geqslant 0$.

Exercice 3

- L'aire du rectangle $ABCD$ est : $2\times(x+1)$
- L'aire du triangle ABC est : $\dfrac{EG\times HF}{2}$ soit $\dfrac{5\times x}{2}$

Rappels ?

- L'aire du rectangle est Longueur $\times$ largeur.
- L'aire du triangle est $\dfrac{\text{Base}\times\text{hauteur}}{2}$

On cherche x pour que l'aire du triangle soit plus grande que l'aire du rectangle soit

$$\begin{aligned}
\frac{5x}{2} &> 2(x+1)\\
2\times\frac{5x}{2} &> 2(x+1)\times 2\\
5x &> 4x+4\\
5x-4x &> 4\\
x &> 4
\end{aligned}$$

Astuce

En multipliant par 2 les deux membres, l'inéquation s'écrit sans dénominateur.

Quand x est strictement supérieur à 4, l'aire du triangle est plus grande que l'aire du rectangle.

Exercice 4

1. a. Pour $x = 60$, $2,5x - 75 = 2,5 \times 60 - 75 = 75$.
Or $75 < 76$. On en déduit que 60 n'est pas solution de l'inéquation.

b.

$$\begin{array}{rcl} 2,5x - 75 & > & 76 \\ 2,5x & > & 76 + 75 \\ 2,5x & > & 151 \\ x & > & \dfrac{151}{2,5} \\ x & > & 60,4 \end{array}$$

Méthode
On divise par $2,5 > 0$, donc on ne change pas le sens de l'inégalité.

2. Il s'agit d'un problème de mise en inéquation :
- Soit x le nombre minimum de glaces qu'il doit vendre.
- Une glace est vendue 2,5 €. Donc la vente de x glaces lui rapporte $2,5x$ €.

Méthode
On procède en 4 étapes : choix de l'inconnue, mise en inéquation, résolution puis conclusion.

- Il dépense 75 € pour réaliser les glaces, donc il lui reste un bénéfice de $2,5x - 75$ €.
- Le bénéfice doit être supérieur à 76 €, donc on cherche x tel que

$$2,5x - 75 > 76$$

Cette inéquation a déjà été résolue (question **1.b**).
On a trouvé $x > 60,4$. Comme x est un nombre entier, le commerçant doit vendre au moins 61 glaces pour obtenir un bénéfice supérieur à 76 €.

Exercice 5

Soit x le nombre d'aller(s)-retour(s)
Sans abonnement Nabolos paiera : $40x$ dans l'année.
Avec l'abonnement Nabolos paiera : $442 + 20x$.

On résout l'inéquation : $40x < 442 + 20x$.

$$\begin{array}{rcl} 40x & < & 442 + 20x \\ 20x & < & 442 \\ x & < & \dfrac{442}{20} \\ x & < & 22,1 \end{array}$$

Comprendre
Les solutions de cette inéquation sont les nombres de trajets pour que le coût sans abonnement soit inférieur au coût avec abonnement. On pouvait également résoudre l'inéquation $40x > 442 + 20x$ qui a pour solutions les nombres de trajets pour que le coût avec abonnement soit inférieur au coût sans abonnement.

Conclusion : jusqu'à 22 allers-retours il vaut mieux ne pas prendre l'abonnement. A partir de 23 allers-retours il est plus intéressant pour Nabolos de prendre l'abonnement.