Lycée Louise Michel (Gisors) http ://mathGM.free.fr
Seconde

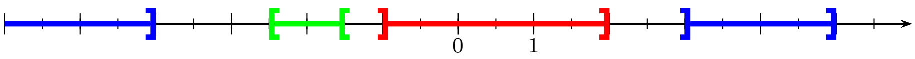
MATHEMATIQUES
Intervalles et inégalités : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

1. $I =]-1\ ;\ 2]$.

2. $J =]-\infty\ ;\ -4] \cup]3\ ;\ 5]$.

3. Représentation de K :



4. • Comme $9 < 10 < 16$, on a : $3 < \sqrt{10} < 4$, d'où $\sqrt{10} \in J$.

L'idée
Sans calculatrice, déterminer un encadrement du nombre proposé qui permette de montrer qu'il est dans I, J ou K.
Par exemple, on encadre 10 par deux carrés parfaits ($9 = 3^2$ et $16 = 4^2$), ce qui permet d'obtenir que $\sqrt{10} \in J$.

• Comme $\dfrac{11}{6} = \dfrac{6}{6} + \dfrac{5}{6} = 1 + \dfrac{5}{6}$ et que $\dfrac{5}{6} < 1$,
on en déduit que $1 < \dfrac{11}{6} < 2$ et par par conséquent que $\dfrac{11}{6} \in I$.

Encadrer
L'idée est d'écrire la fraction comme la somme d'un entier (le plus grand possible) et d'une fraction dont le numérateur est plus petit que le dénominateur (et donc plus petite que 1), ce qui permet d'obtenir un encadrement à l'unité.

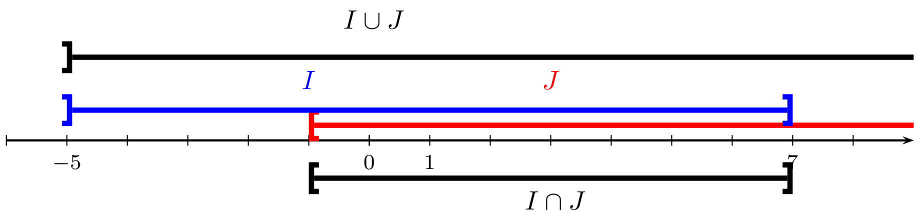
• Comme $16 < 17 < 25$, on a $4 < \sqrt{17} < 5$.
Donc $-4 > -\sqrt{17} > -5$ et finalement $-3 > 1 - \sqrt{17} > -4$.

Ainsi, $1 - \sqrt{17}$ n'est ni dans I, ni dans J ni dans K.

N'oubliez pas !
Quand on multiplie par un nombre négatif (ici -1) on change le sens de l'inégalité.

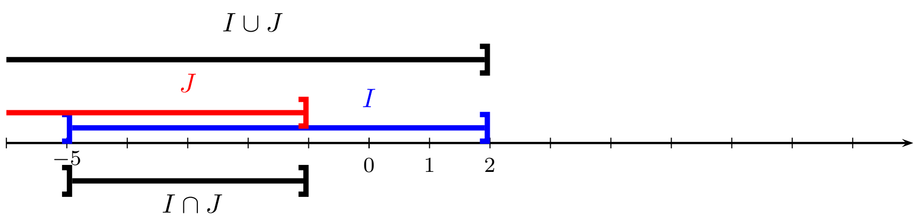
Exercice 2

a. On représente graphiquement les intervalles $I = [-1\ ;\ +\infty[$ et $J =]-5\ ;\ 7]$.



$I \cap J = [-1\ ;\ 7]$ et $I \cup J =]-5\ ;\ +\infty[$.

b. On représente graphiquement les intervalles $I = [-5\ ;\ 2]$ et $J =]-\infty\ ;\ -1]$.



$I \cap J =]-5\ ;\ -1]$ et $I \cup J =]-\infty\ ;\ 2]$.

Exercice 3

1. • $4,569 < 4,57 < 4,571$

- $0,059 < 0,06 < 0,061$
- $6,999 < 7 < 7,001$
- $2,099 < 2,1 < 2,101$
- $4,458 < 4,4589 < 4,459$

Deux choses

• Les nombres doivent avoir trois chiffres derrière la virgule ;
• Ils doivent être les plus proches possibles.
Sans ces deux conditions, il y aurait une infinité de solutions.

2. • Pour $\sqrt{157}$:
La calculatrice donne $\sqrt{157} \simeq 12,52996409$.
Ainsi, $\sqrt{157}$ est supérieur à 12,529 et inférieur à 12,530.

$$12,529 < \sqrt{157} < 12,530$$

Méthode

Pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2}, obtenir $n+1$ décimales avec la calculatrice.

• Pour $\dfrac{17}{13}$:
La calculatrice donne $\dfrac{17}{13} \simeq 1,307692308$.
Ainsi, $\dfrac{17}{13}$ est supérieur à 1,307 et inférieur à 1,308.

$$1,307 < \frac{17}{13} < 1,308$$

• Pour $1+\sqrt{427}$:
La calculatrice donne $1+\sqrt{427} \simeq 20,66397832$.
Ainsi, $1+\sqrt{427}$ est supérieur à 20,663 et inférieur à 20,664.

$$20,663 < 1+\sqrt{427} < 20,664$$

Exercice 4

1. a. Comparaison de de $3a$ et $3b$:

$$\begin{array}{rcll} a & < & b & \\ 3\times a & < & 3\times b & \text{On multiplie par } 3>0 \\ 3a & < & 3b & \end{array}$$

b. Comparaison de de $-\dfrac{a}{3}$ et $-\dfrac{b}{3}$:

$$\begin{array}{rcll} a & < & b & \\ -\dfrac{1}{3}\times a & > & -\dfrac{1}{3}\times b & \text{On multiplie par } -\dfrac{1}{3}<0 \\ -\dfrac{a}{3} & > & -\dfrac{b}{3} & \end{array}$$

c. Comparaison de de $1-2a$ et $1-2b$:

$$\begin{array}{rcll} a & < & b & \\ -2\times a & > & -2\times b & \text{On multiplie par } -2<0 \\ 1-2a & > & 1-2b & \text{On ajoute } 1 \end{array}$$

Méthode

Procédez par étapes :
Pour fabriquer $1-2a$ et $1-2b$ il faut commencer par comparer $-2a$ avec $-2b$, puis on ajoute 1. Ne pas oublier les règles dans les inégalités.

2. a. Encadrement de $\sqrt{2}-5$.

$$\begin{array}{rcccl} 1,4 & < & \sqrt{2} & < & 1,5 \\ 1,4-3 & < & \sqrt{2}-3 & < & 1,5-3 \quad \text{On retranche } 3 \\ -1,6 & < & \sqrt{2}-3 & < & -1,5 \end{array}$$

b. Encadrement de $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$$\begin{array}{rcl} 1,4 & <\sqrt{2}< & 1,5 \\ 1,4\times\dfrac{1}{4} & <\sqrt{2}\times\dfrac{1}{4}< & 1,5\times\dfrac{1}{4} \quad \text{On multiplie par } \dfrac{1}{4}>0 \\ 0,35 & <\dfrac{\sqrt{2}}{4}< & 0,375 \end{array}$$

Vous le saviez !

$\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{1}{4}\times\sqrt{2}$.

c. Encadrement de $-2\sqrt{2}+6$.

$$\begin{array}{rcl} 1,4 & <\sqrt{2}< & 1,5 \\ 1,4\times(-2) & >\sqrt{2}\times(-2)> & 1,5\times(-2) \quad \text{On multiplie par } -2<0 \\ -2,8 & >-2\sqrt{2}> & -3 \\ -2,8+6 & >-2\sqrt{2}+6> & -3+6 \quad \text{On ajoute } 6 \\ 3,2 & >-2\sqrt{2}+6> & 3 \end{array}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned} 3(x+5) &\geqslant -2(x+10) \\ 3\times x+3\times 5 &\geqslant -2\times x-2\times 10 \quad \text{On développe} \\ 3x+15 &\geqslant -2x-20 \\ 3x+2x &\geqslant -20-15 \\ 5x &\geqslant -35 \quad \text{On isole les } x \\ x &\geqslant \frac{-35}{5} \quad \text{On divise par } 5>0 \\ x &\geqslant -7 \end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à -7 soit $[-7\ ;\ +\infty[$.

$$\begin{aligned} -5x+2 &> 2(x-6) \\ -5x+2 &> 2\times x-2\times 6 \\ -5x+2 &> 2x-12 \\ -5x-2x &> -12-2 \\ -7x &> -14 \\ x &< \frac{-14}{-7} \quad \text{On divise par } -7<0 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 2 soit $]-\infty\ ;\ 2[$.

$$\begin{aligned} \frac{4x+1}{3} &< 1 \\ 3\times\left(\frac{4x+1}{3}\right) &< 1\times 3 \\ 4x+1 &< 3 \\ 4x &< 3-1 \\ 4x &< 2 \\ x &< \frac{2}{4} \\ x &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Astuce

Pour ne plus avoir de quotient, on multiplie les deux membres par 3.

Les solutions de cette inéquation sont les nombres strictement inférieurs à $\dfrac{1}{2}$ soit $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$.

Exercice 6

- On note x le nombre de contrats que le représentant vend.
- Son salaire est donné par : fixe + 52 € par objets vendu soit $800 + 52 \times x$.

Modélisation

Pour modéliser le problème :
On commence par désigner par une inconnue le nombre de contrats cherchés.
On traduit le problème posé par une inéquation.
On résout l'inéquation puis on conclut.

- On cherche x de façon que $800 + 52x > 2300$.

$$\begin{aligned} 800 + 52x &> 2300 \\ 52x &> 2300 - 800 \\ x &> \frac{1500}{52} (\simeq 28,8) \end{aligned}$$

Le représentant doit vendre au moins 29 contrats pour obtenir un salaire d'au moins 2300 €.