
MATHEMATIQUES

Nombres et calculs numériques : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. L'écriture décimale du nombre $5,3 \times 10^5$ est : 530 000.

2. $\frac{12}{\frac{3}{4}} = 12 \times \frac{4}{3} = 16.$

On peut remplir 16 bouteilles de $\frac{3}{4}$ de litre.

3. Calcul de $\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}{7}.$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}{7} &= \frac{\frac{12}{18} + \frac{15}{18}}{7} \\ &= \frac{\frac{27}{18}}{7} \\ &= \frac{27}{18} \times \frac{1}{7} \\ &= \frac{27}{126} \end{aligned}$$

4. On exprime b en fonction de a :

$$\begin{aligned} b &= 2 \times 3^5 \times 7^2 \\ &= 2 \times 3 \times \underbrace{3^4 \times 7 \times 7}_{=a} \\ &= 2 \times 3 \times 7 \times a \\ &= 42a \end{aligned}$$

Multiple

Un multiple de a est le produit de a par un nombre entier. Autrement dit, un multiple de a est un nombre qui, divisé par a , donne un résultat entier.

Ainsi, b est un multiple de a si et seulement si il existe un entier k tel que $b = a \times k$.

b est bien un multiple de a .

5. 700 Mo = 0,7 Go.

$$32 \div 0,7 \simeq 45,7.$$

Il faudra 46 CD de 700 Mo pour stocker autant de données qu'une clé de 32 Go.

Mo et Go

$$1 \text{ Go} = 1\,000 \text{ Mo}$$

Vrai/Faux : comment procéder ?

Si l'on veut prouver qu'une propriété est vraie, il faut la démontrer dans le cas général à l'aide d'un calcul littéral, d'un théorème, d'une définition, d'une règle, ...

6. En revanche, pour prouver qu'elle est fautive, il suffit de trouver un contre-exemple. Il s'agit en fait d'exhiber un cas (un seul suffit !) pour lequel elle n'est pas vraie. Un tel cas particulier est appelé **contre-exemple**. Le contre-exemple doit vérifier l'hypothèse (ou les hypothèses) mais ne doit pas vérifier la conclusion.

a. Affirmation 1 : FAUX

Le nombre $11 \times 13 = 143$ est un multiple à la fois de 11 et de 13.

143 est bien un multiple de 11 car il existe un entier a (en fait, c'est 13) tel que $143 = 11 \times a$ et

143 est bien un multiple de 13 car il existe un entier b (en fait, c'est 11) tel que $143 = 13 \times b$.

Confusion

Ne confondez pas diviseurs et multiples !

Affirmation 2 : FAUX

7 est un multiple de 7 et 14 est aussi un multiple de 7.
 $14 + 7 = 21$ et 21 n'est pas un multiple de 49.

Contre-exemple

Le couple (7 ; 14) est un contre-exemple car 7 et 14 sont bien des multiples de 7 (ils vérifient l'hypothèse : "deux multiples de 7", mais la conclusion n'est pas vérifiée puisque leur somme n'est pas un multiple de 49.

b. Affirmation 3 : FAUX

Le tiers de $\frac{2}{15}$ se calcule par : $\frac{1}{3} \times \frac{2}{15} = \frac{2}{45} \neq \frac{6}{15}$.

Attention

Le tiers de $\frac{6}{15}$ est $\frac{2}{15}$.

c. Affirmation 4 : FAUX

$$\begin{aligned} 15 - 5 \times 7 + 3 &= 15 - 35 + 3 \\ &= -20 + 3 \\ &= -17 \end{aligned}$$

Priorité

Vous le saviez mais je le rappelle quand même :-)
La multiplication est prioritaire sur l'addition.

d. Affirmation 5 : FAUX

$$\left. \begin{aligned} \bullet DE^2 &= (13\sqrt{7})^2 = 13^2 \times 7 = 1183 \\ \bullet CE^2 + CD^2 &= (\sqrt{175})^2 + (12\sqrt{7})^2 = 175 + 12^2 \times 7 = 1183 \end{aligned} \right\} \text{ Donc : } DE^2 = CD^2 + CE^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle CDE est bien rectangle en C .

Exercice 2

Nabolos doit donner 6 crêpes à chacun de ses cousins. En effet, $31 = 5 \times 6 + 1$ et du coup, il lui reste une crêpe. En revanche, s'il partage les crêpes en 8 (en comptant les trois cousins supplémentaires), il lui reste 7 crêpes. En effet, $31 = 8 \times 3 + 7$. Ainsi, les 8 cousins auront 3 crêpes chacun et il restera 7 crêpes.

Voilà pourquoi Nabolos est parti chercher ses trois autres cousins !

Exercice 3

On peut décomposer 324 en produit de facteurs premiers pour aider : $324 = 2^2 \times 3^4$.
Les diviseurs de 324 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 27 ; 36 ; 54 ; 81 ; 108 ; 162 ; 324.

Il y a donc deux possibilités : 36 et 54.

On peut faire 9 groupes de 36 ou 6 groupes de 54.

Exercice 4

- $162 = 2 \times 81 = 2 \times 9 \times 9 = 2 \times 3^2 \times 3^2 = 2 \times 3^4$.
 $108 = 2 \times 54 = 2 \times 2 \times 27 = 2^2 \times 3^3$.

2. Les diviseurs communs à 162 et 108 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18 ; 27 et 54.
Ils ont donc trois diviseurs communs plus grands que 10 : 18 ; 27 et 54.
3. a. Le cuisiner ne peut pas réaliser 36 barquettes car 36 ne divise pas 162.
b. Le plus grand commun diviseur à 162 et 108 est 54 ; le cuisinier peut donc préparer 54 barquettes.
c. On a $162 \div 54 = 3$ et $108 \div 54 = 2$. Par conséquent, chaque barquette contiendra alors 3 nems et 2 samoussas.

Exercice 5

Comment procéder ?

Pour pouvoir utiliser l'information 3 (et c'est elle qui va être décisive sur le choix), on a besoin de la distance écran-télespectateur (tout va bien, on l'a) et la longueur de la diagonale de l'écran, que l'on a pas et donc qu'il faut calculer.

De quelles informations disposent-on pour calculer la diagonale de l'écran : de la hauteur de l'écran (60 cm), de la formule pour calculer la largeur de l'écran quand on a sa hauteur (ça tombe bien, on l'a). On peut donc déjà calculer la largeur et ayant la longueur on pourra peut-être calculer sa diagonale, non ?

La hauteur de l'écran envisagé est de $h = 60$ cm, donc sa largeur est : $\ell = \frac{16}{9} \times 60 = \frac{16}{3} \times 20 = \frac{320}{3}$ cm.

D'après le théorème de Pythagore la diagonale d de son écran (c'est un rectangle) est telle que :

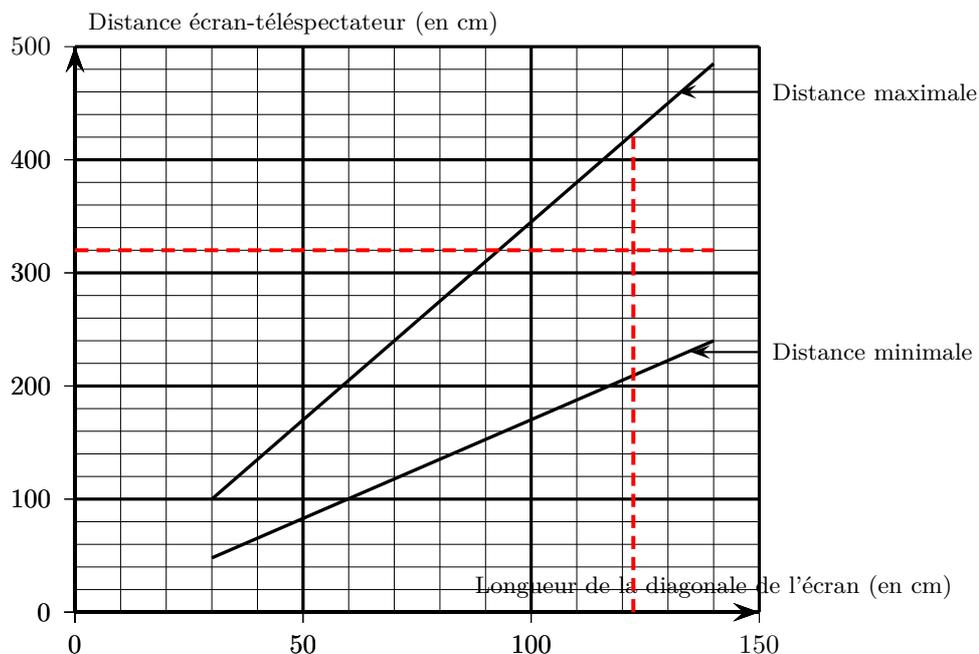
$$d^2 = h^2 + \ell^2 = 60^2 + \left(\frac{320}{3}\right)^2 = \frac{134\,800}{9}$$

Ainsi,

$$d = \sqrt{\frac{134\,800}{9}} \simeq 122,4$$

Sur le graphique ci-dessous on trace donc la droite verticale d'équation $x = 122,4$ et horizontalement la droite d'équation $y = 3,20$; ces deux droites sont sécantes en un point de coordonnées $(122,4 ; 3,2)$ et ce point est bien dans la région conseillée une distance à l'écran entre 200 et 415 cm).

Nabolos peut acheter le téléviseur.



Exercice 6

1. VRAI

$(-3)^2$ est un nombre positif, donc l'écriture $\sqrt{(-3)^2}$ a bien un sens.

Et même

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

2. VRAI

$$2 \times \sqrt{5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}.$$

Les règles

Si a et b sont positifs :

- $a = \sqrt{a^2}$.
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

3. VRAI

5 et (-5) ont le même carré : 25.

4. FAUX

Seul 4 a pour racine carrée 2.

5. FAUX

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Racine carrée de
la somme 9 + 16

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

Somme des ra-
cines carrées de
9 et 16

$5 \neq 7$, donc la proposition est fausse.

Contre-exemple

Un contre-exemple suffit
pour montrer qu'une pro-
priété est fausse.

6. FAUX

On calcule l'aire d'un carré par le carré du côté. Si c est la longueur du côté, on a $c^2 = 3$, soit $c = \sqrt{3} \neq 1, 5$.

7. FAUX

Le carré de $\sqrt{2}$ s'écrit $(\sqrt{2})^2$ et est égal à 2.

Exercice 7

1. Justification de l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4n} + \frac{1}{3n} + \frac{5}{12n} &= \frac{3 \times 3}{4n \times 3} + \frac{1 \times 4}{3n \times 4} + \frac{5}{12n} && \text{Le dénominateur commun est } 12n \\ &= \frac{9}{12n} + \frac{4}{12n} + \frac{5}{12n} \\ &= \frac{18}{12n} \\ &= \frac{3}{2n} \end{aligned}$$

2. On utilise le résultat précédent avec $n = 7$ car dans ce cas, $2n = 14$ et $\frac{3}{2n} = \frac{3}{14}$.

Comme $\frac{3}{2n} = \frac{3}{4n} + \frac{1}{3n} + \frac{5}{12n}$, alors :

$$\frac{3}{2 \times 7} = \frac{3}{14} = \frac{3}{4 \times 7} + \frac{1}{3 \times 7} + \frac{5}{12 \times 7} = \underbrace{\frac{3}{28} + \frac{1}{21} + \frac{5}{84}}_{\text{Somme de 3 fractions}}$$