MATHEMATIQUES
Géométrie plane : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

1. • Le triangle est isocèle en A car $AB = AC$.
• $[BC]$ est un diamètre du cercle et A est un point de ce cercle. On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.

Réponse : ☒ rectangle ☒ isocèle.

2. Le triangle ABC étant rectangle en A, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \\ 4^2 + 4^2 &= BC^2 \\ BC^2 &= 16 + 16 \\ BC^2 &= 32 \\ BC &= \sqrt{32} \end{aligned}$$

Rappel ?
Le cercle circonscrit est le cercle qui passe par les 3 sommets. Son rayon est donné ici par la longueur $[OA]$.

On en déduit que le rayon est égal à $\sqrt{32} \simeq 2,8$.
Réponse : ☒ environ 2,8.

3. • La droite (OA) passe par le milieu de $[BC]$, on en déduit que c'est une médiane.
• La triangle ABC est isocèle en A et O est le milieu de $[BC]$, donc $(OA) \perp (BC)$. On en déduit que (OA) est une hauteur.
• (OA) passe par le milieu de $[BC]$ et est perpendiculaire à (BC), on en déduit que (OA) est une médiatrice.

Réponse : ☒ une médiane ☒ une hauteur ☒ une médiatrice.

4. • Un losange est un parallélogramme.
• Dans un losange, les côtés ne sont pas forcément perpendiculaires.

Rappel ?
Un losange possède toutes les propriétés du parallélogramme.

• Un losange est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur.

Encore ?
Si deux côtés consécutifs dans un parallélogramme sont de même longueur, alors les quatre côtés sont de même longueur.

Réponse : ☒ un parallélogramme

5. • D'après la figure, le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. C'est donc un parallélogramme. De plus, ses diagonales sont perpendiculaires, c'est donc un losange.

Encore ?
Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

• Dans le triangle AOB rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 &= AB^2 \\ 4^2 + 3^2 &= AB^2 \\ AB^2 &= 16 + 9 \\ AB^2 &= 25 \\ AB &= \sqrt{25} \\ AB &= 5 \end{aligned}$$

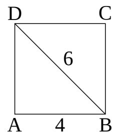
Toujours ?
Quand on utilise le théorème de Pythagore, on le cite et on donne le triangle dans lequel on l'utilise.

• Le losange est constitué de 4 triangles rectangles de même aire : $\dfrac{4\times 3}{2}=6$.
On en déduit que son aire est $4\times 6=24$.

Réponse : ☒ $ABCD$ est un losange ☒ $AB=5$ ☒ L'aire de $ABCD$ est 24.

Exercice 2

1. Faux. Si un tel carré existait, on aurait un carré $ABCD$ comme représenté ci-contre :



Le triangle ABD serait rectangle et isocèle en A avec $AB=AD=4$ et $BD=6$.

Or :

• $BD^2=6^2=36$.
• $AB^2+AD^2=4^2+4^2=16+16=32$

Contraposée
La propriété utilisée ici est la contraposée du théorème de Pythagore.

On a donc $BD^2\neq AB^2+AD^2$, le théorème de Pythagore n'est pas vérifié, donc le triangle n'est pas rectangle. On en déduit qu'un tel carré n'existe pas !

2. Faux. 5 étant la plus grande longueur, si le triangle est rectangle, c'est la longueur de l'hypoténuse.
Or :
• $5^2=25$.
• $3^2+\sqrt{8})^2=9+8=17$
D'où $3^2+\sqrt{8})^2\neq 5^2$

D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

3. Faux. La longueur du segment joignant les deux milieux des côté d'un triangle est égal à la moitié du troisième côté. Or 5 n'est pas la moitié de 7. En réalité, $AC=2\times IJ=10$ cm.

4. Vrai. Le périmètre d'un carré de côté a est : $4a$.
Le périmètre d'un carré de côté $a+1$ est $4(a+1)=4a+4$.
Le périmètre augmente donc bien de 4 cm.

5. Vrai. L'aire d'un carré de côté a est a^2.
L'aire d'un carré de côté $a+1$ est :

$$(a+1)^2=(a+1)(a+1)=a^2+a+a+1=a^2+2a+1$$

L'aire augmente donc bien de $2a+1$ cm.

Egalité remarquable
On peut utiliser l'égalité remarquable (si vous la connaissez !) :
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Exercice 3

$x_R=\dfrac{x_M+x_P}{2}=\dfrac{0+(-3)}{2}=-1,5$.

$y_R=\dfrac{y_M+y_P}{2}=\dfrac{-1+2}{2}=0,5$.
Ainsi, $R(1,5\ ;\ 0,5)$.

De même, $x_S=\dfrac{x_N+x_P}{2}=\dfrac{5+(-3)}{2}=1$.

$y_S=\dfrac{y_M+y_N}{2}=\dfrac{0+2}{2}=1$.
Ainsi, $S(1\ ;\ 1)$.

Conseils
• Vous pouvez évidemment vérifier vos résultats en plaçant les points sur le graphique.
• Ces formules sont à connaître par coeur (pensez milieu/moyenne).
• Dans ces formules, x_M désigne l'abscisse du point M soit 0 et y_M son ordonnée soit -1.

$$M(\underbrace{0}_{x_M}\ ;\ \underbrace{-1}_{y_M})$$

Exercice 4

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-4-1)^2 + (5-(-2))^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{25+49} \\ &= \sqrt{74} \end{aligned}$$

Conseils

• Comme la formule pour le milieu, celle sur la distance est à connaître par coeur (elle se démontre avec le théorème de Pythagore).

• Si vous inversez x_B et x_A, c'est-à-dire si vous écrivez $(x_A - x_B)^2$ au lieu de $(x_B - x_A)^2$, pas de souci. Deux nombres opposés ont le même carré. En effet $(x_A - x_B)$ et $(x_B - x_A)$ sont opposés : $7^2 = (-7)^2$.

De même,

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(2-5)^2 + (3-(-4))^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{9+49} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$