MATHEMATIQUES
Signe d'une fonction et inéquations : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1

Explications

Quand les images par f sont négatives, on dit que la fonction est négative et quand les images par f sont positives, on dit que la fonction est positive. Graphiquement, cela se voit par la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses. Quand la courbe se situe au-dessus de l'axe des abscisses, les images sont positives et la fonction est positive et quand la courbe se situe en dessous de l'axe des abscisses, les images sont négatives et la donc la fonction est négative.

1. Tableau de signes de la fonction f :

x	-4		-3		1		4
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

0 doit apparaître

En 1, la fonction s'annule mais reste positive. Les valeurs qui annulent la fonction doivent apparaître dans le tableau de signes.

2. Tableau de signes de la fonction g :

x	-50		-40		-10		40
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Tableau de signes de la fonction h :

x	0		1		7		8
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

4. Tableau de signes de la fonction u :

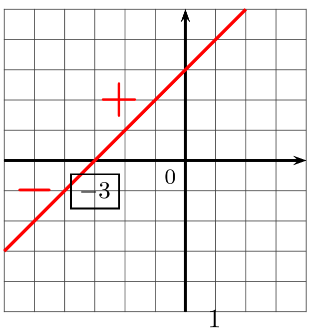
x	$-0{,}8$		$-0{,}3$		$0{,}9$
Signe de $u(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 2

- $f(x) = x + 3$

$$\begin{aligned} x+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	



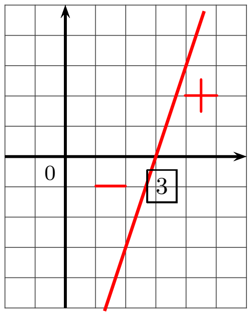
Conseil

En représentant rapidement f, on voit très bien les signes. A gauche de -3, les images sont négatives et à droite de -3, les images sont positives.

- $g(x) = 3x - 9$

$$\begin{aligned} 3x - 9 &= 0 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	



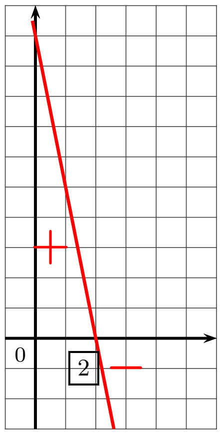
Les signes

Le signe de m se met à droite de la valeur qui annule la fonction. C'est une règle qui vous pouvez connaître.

- $h(x) = 10 - 5x$

$$\begin{aligned} 10 - 5x &= 0 \\ -5x &= -10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	



Les signes

Signe de m à droite, c'est donc négatif à droite de la valeur 2.

Exercice 3

1. a. $x + 7$ s'annule pour $x = -7$ et $-2x + 8$ s'annule pour $x = 4$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-7		4		$+\infty$
Signe de $x + 7$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-2x + 8$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ -7[\cup]4\ ;\ +\infty[$.

Explications

C'est sur la dernière ligne du tableau qu'apparaît le signe de $f(x)$. Les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ se lisent sur la première ligne du tableau.

2. a. On factorise $4 - 16x^2$ qui est une différence de deux carrés.

$$\begin{aligned} 4 - 16x^2 &= \underbrace{2^2}_{a^2} - \underbrace{(4x)^2}_{b^2} \\ &= \underbrace{(2 - 4x)}_{(a-b)}\underbrace{(2 + 4x)}_{(a+b)} \end{aligned}$$

Attention

On ne vous donnera pas tout le temps la méthode pour cette factorisation. Vous devez reconnaître une différence de deux carrés et savoir la factoriser.

b. $2-4x$ s'annule pour $x=0,5$ et $2+4x$ s'annule pour $x=0,5$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$0{,}5$		$+\infty$
Signe de $2-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $2+4x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $4-16x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Méthode

• La résolution de cette inéquation passe par un tableau de signe. La factorisation demandée à la question précédente vous servira pour cette question.
• Les signes de $2+4x$ et $2-4x$ s'obtiennent grâce aux signes des fonctions affines (signe de m à droite de la valeur qui annule).

Ainsi, l'inéquation $4-16x^2 \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions $[-0,5\ ;\ 0,5]$.

1. $x-6$ s'annule en $x=6$. Donc l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R} \setminus \{6\}$.

2.

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
Signe de $2x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Conseils

On dresse le tableau de signes d'un quotient comme celui d'un produit. La différence c'est la (ou les) valeurs interdites sur la dernière du tableau. La règle des signes est la même ($+$ par $+$ donne $+$ ($+$ diviser par $+$ donne $+$) etc ...) Je ne suis pas sûr d'être très clair là.

3. Pour résoudre cette inéquation, on le tableau de signe de $f(x)$.
$\mathscr{S} = [2\ ;\ 6[$.

Exercice 4

1. On étudie le signe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(3x+4)(-2x+6)$.
Recherche des valeurs qui annulent :

- $3x+4=0$ implique $x=-\dfrac{4}{3}$.
- $-2x+6=0$ implique $x=3$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{3}$		3		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'ensemble $\left]-\infty; -\dfrac{4}{3}\right] \cup [3; +\infty[$.

2. On étudie le signe de la fonction l définie par $l(x)=\dfrac{3x-5}{2x+7}$.

- Recherche de la valeur interdite :
$2x+7 \neq 0$ implique $x \neq -\dfrac{7}{2}$.
Donc l est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$.

- Recherche de la valeur qui annule l :

$3x-5=0$ implique $x=\dfrac{5}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$l(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Attention

Cela va sans dire mais je le dis quand même. Les nombres sur la première ligne doivent être rangés dans l'ordre croissant.

Les solutions de l'inéquation $\dfrac{3x-5}{2x+7}>0$ sont les nombres de l'ensemble $\left]-\infty;-\dfrac{7}{2}\right[\cup\left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[$.