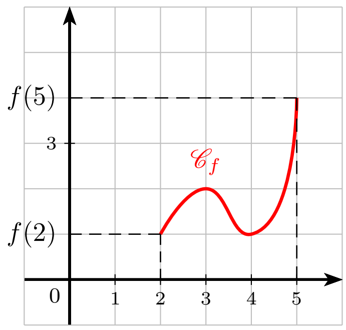
MATHEMATIQUES
Variations et extremums entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. Un petit dessin pour comprendre que l'affirmation est fausse.
La fonction f vérifie bien $f(2) < f(5)$ et pourtant, f n'est pas strictement croissante sur $[2\ ;\ 5]$.

Justification

La justification se fait ici avec un graphique. C'est un contre exemple. La fonction f vérifient bien les hypothèses ($f(2) < f(5)$ mais pas la conclusion : "f est strictement croissante sur $[2\ ;\ 5]$".

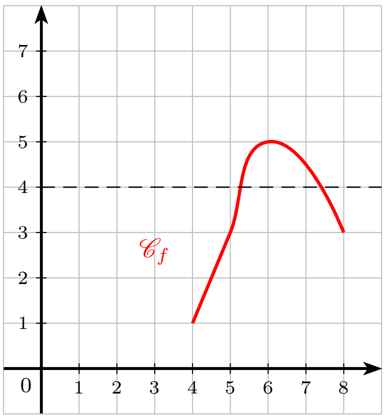


2. Cette affirmation est vraie. en effet si f est décroissante sur $[-3\ ;\ 2]$, cela signifie que le maximum de f est atteint en $x = -3$. Par conséquent, on a bien pour tout réel x de $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \leqslant f(-3)$.

3. Encore un petit dessin pour justifier que cette affirmation est fausse.

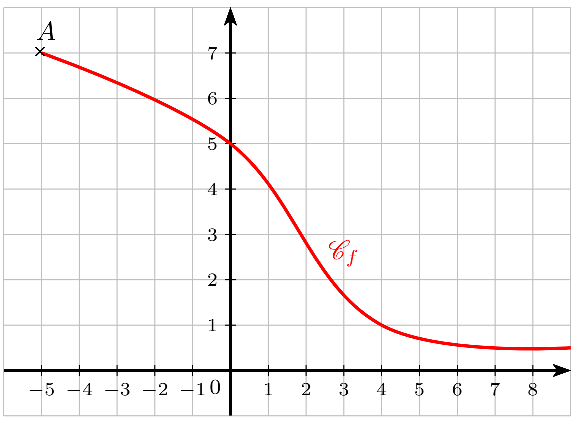
Justification

Il y a des images qui sont inférieures à 4. C'est un peu n'importe quoi cette affirmation !

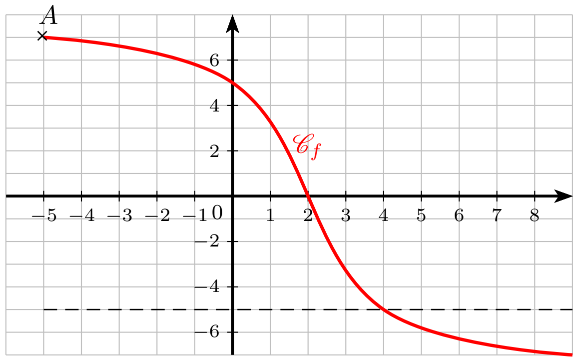


4. C'est vrai. Le point A étant sur C_f, son ordonnée est l'image de son abscisse. Ainsi, $f(-5) = 7$. En d'autres termes, -5 est solution de l'équation $f(x) = 7$.

5. C'est faux.
On peut très bien imaginer une fonction strictement décroissante sur $[-5\ ;\ +\infty[$ avec $f(4000) > 0$.
Sur le graphique ci-contre les images restent toujours strictement positives quelque soit les valeurs de x. La fonction étant bien strictement décroissante sur $[-5\ ;\ +\infty[$.



6. C'est encore faux. Encore un graphique qui le prouve.
On voit bien que la courbe passe en-dessous de la droite d'équation $y = -5$ et donc que les images sont inférieures à -5 (à partir de $x = 4$ ici).



Exercice 2

1. Le maximum de f est 4. Il est atteint lorsque $x = 0$.
Le minimum de f est -6. Il est atteint lorsque $x = 4$.

Conseil
Soyez précis dans votre rédaction.

2. Tableau de variations de f sur $[-6\ ;\ 10]$.

x	-6	0	4	10
$f(x)$	-2 ↗	4 ↘	-6 ↗	-3

3. Inégalités complétées.

a. Si $-3 \leqslant x \leqslant 0$, alors $1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

b. Si $0 \leqslant x \leqslant 10$, alors $-6 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

c. Si $f(x) < -2$, alors $x \in]2\ ;\ 10]$

4. Résolution de l'équation et de l'inéquation.

$f(x) = 4$ $\mathscr{S}_1 = \{0\}$

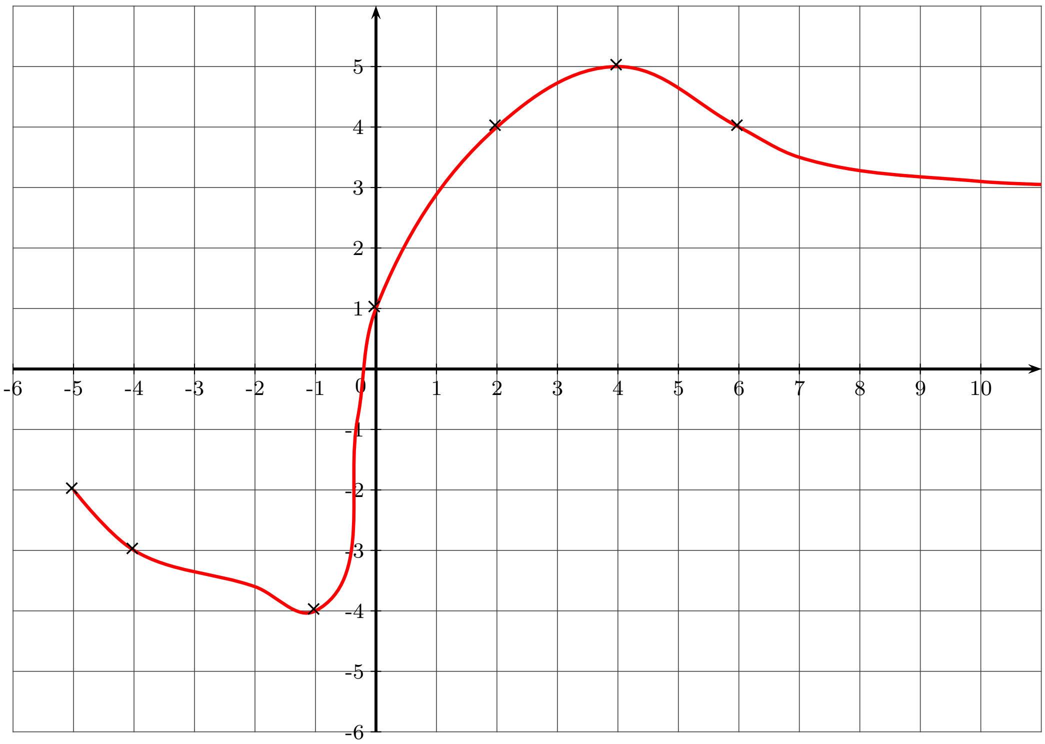
$f(x) < 3$ $\mathscr{S}_2 = [-6\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ 10]$

Explications
Pour résoudre l'inéquation $f(x) < 3$, on commence par tracer la droite d'équation $y = 3$. Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe qui se situent strictement en dessous de cette droite.
-1 n'est pas solution de l'inéquation car $f(-1) = 3$ (et nous on veut $f(x) < 3$). Il en est de même pour 1.
-6 est solution de l'inéquation car $f(-6) = -2$ et -2 est bien strictement inférieur à 3.

Exercice 3

Explications

Commencez par placer les points obtenus grâce au tableau de variations (comme le point de coordonnées $(-5\ ;\ -2)$). Puis placez les points obtenus grâce aux deux égalités $f(-4) = -3$ et $f(2) = 4$. Ensuite placez le point obtenu par la phrase "L'image de 6 est 4". Enfin, n'oubliez pas que pour $x > 4$, $f(x) > 3$. Cela signifie que les images ne doivent pas "descendre" en dessous de 3 lorsque $x > 4$. Par conséquent, la courbe doit rester (strictement) au dessus de la droite d'équation $y = 3$ lorsque $x > 4$.
Vous pouvez alors tracer la courbe en suivant les variations données par le tableau.



Exercice 4

Explications

La difficulté de cet exercice réside dans la compréhension de la problématique. Le point M parcourt les côtés du rectangle en partant de A et en revenant en A. En notant x la distance parcouru par le point M à partir du point A, les valeurs de x varient de 0 à 20. Il faut alors regarder comment évolue la distance EM au fur et à mesure de l'avancement du point M sur les côtés du rectangle.

1. a. L'image de 0 par la fonction f est 5
Le point M est alors en A. $f(0)$ est égal à la longueur EA.
Dans le triangle DEA rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, $EA^2 = AD^2 + DE^2$, soit $EA^2 = 25$, soit $EA = 5$.

b. L'image de 10 par la fonction f est 3 (le point M est en C).

c. 13 est l'unique antécédent de 0 par f (Le point M est en E).

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

x	0		3		6		13		20
$f(x)$	5	↘	4	↗	5	↘	0	↗	5