Lycée Louise Michel (Gisors) http ://mathGM.free.fr
Seconde

MATHEMATIQUES
Variations et extremums entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. L'équation $f(x) = 2,5$ a deux solutions dans $[-5\ ;\ 5]$. L'une dans l'intervalle $[-5\ ;\ -4]$ et l'autre dans l'intervalle $[4\ ;\ 5]$.
Visualisation dans le tableau :

x	-5	x_1	-4	-3	-2	0	1	3	4	x_2	5
$f(x)$	2	2,5	1	0	-4	1	-2	0	1	2,5	3

2. a. L'équation $f(x) = 0$ admet 4 solutions dans l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$.

b. On visualise la situation dans le tableau :

x	-5	-4	$x_1 = -3$	-2	x_2	0	x_3	1	$x_4 = 3$	4	5
$f(x)$	2	1	0	-4	0	1	0	-2	0	1	3

On a donc $x_1 = -3$, $-2 < x_2 < 0$, $0 < x_3 < 1$ et $x_4 = 3$.

3. On regarde dans le tableau pour quelles valeurs de x, les images sont strictement supérieures à 1.

L'inéquation $f(x) > 1$ a pour ensemble de solution $\mathscr{S} = [-5\ ;\ -4[\cup]4\ ;\ 5]$.

Remarque
0 n'est pas solution de cette inéquation car son image est 1 et on veut des images strictement supérieures à 1.

4. Le maximum de f est 3. Il est atteint en $x = 5$. Le minimum de f est -4. Il est atteint en $x = -2$.

5. Le tableau qui permet de visualiser la situation :

x	-5	-4	-3	-2	$-0{,}9$	$-0{,}8$	0	$0{,}5$	$0{,}6$	1	3	4	5
$f(x)$	2	1	0	-4	$f(-0{,}9)$	$f(-0{,}8)$	1	$f(0{,}5)$	$f(0{,}6)$	-2	0	1	3

• $0,5 < 0,6$ f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$ (cet intervalle contient les nombres 0,5 et 0,6).
Comme une fonction strictement décroissante change l'ordre, on obtient :

$$f(0,5) > f(0,6)$$

• $-0,9 < -0,8$ f est strictement croissante sur $[-2\ ;\ 0]$ (cet intervalle contient les nombres $-0,9$ et $-0,8$).
Comme une fonction strictement croissante conserve l'ordre, on obtient :

$$f(-0,9) < f(-0,8)$$

• $-4,5 \in [-5\ ;\ -4]$ et sur cet intervalle, les images varient entre 1 et 2. Ainsi, $1 < f(-4,5) < 2$.
De même $2 \in [1\ ;\ 3]$ et sur cet intervalle les images varient entre -2 et 0. Ainsi, $-2 < f(2) < 0$.
De ces deux encadrements, on en déduit que $f(2) < f(-4,5)$

Explications

Pour cette question, on ne peut pas utiliser les variations de f. En effet $-4,5$ et 2 n'appartiennent pas à un intervalle sur lequel la fonction est strictement monotone (c'est-à-dire soit strictement croissante, soit strictement décroissante). Il faut donc trouver un autre moyen. Ici, on procède par encadrement en regardant dans quel intervalle se situe $f(-4,5)$ et $f(2)$ en espérant que ces deux intervalles ne se chevauchent pas. Ce n'est pas le cas ici. Ouf !

6. Encadrements.

a. Si $-2 \leqslant x \leqslant 0$, alors $-4 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

b. Si $-5 \leqslant x \leqslant 0$, alors $-4 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

Explications

On encadre les images sur un intervalle en prenant le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.
Par exemple, lorsque $-2 \leqslant x \leqslant 0$, le minimum de f est -4 et le maximum est 0.

7. Le point A est sur la courbe si $f(2) = -5$.
On regarde si c'est possible avec le tableau de variations. On voit que $-2 < f(2) < 0$. Or, -5 n'est pas compris entre -2 et 0.
Le point A ne peut pas être sur la courbe.

Attention

Le piège ici était de confondre images et antécédents. En effet le point de coordonnées $(-5\ ;\ 2)$ est bien sur la courbe. Donc, prudence.

Exercice 2

Explications

Pour cet exercice, l'idée est de déterminer en fonction de x la consommation sur la distance $CM+MF$ et de minimiser cette consommation, c'est-à-dire de trouver la valeur de x pour laquelle la consommation est minimale. Il s'agit donc de trouver une fonction f qui donne la consommation (en litres) en fonction de x.
Pour cela, on exprime CM et MF en fonction de x et après essayez de faire seul.

• Calcul de CM en fonction de x.
Dans le triangle CHM rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} HM^2 + HC^2 &= CM^2 \\ x^2 + 3^2 &= CM^2 \\ CM &= \sqrt{x^2+9} \end{aligned}$$

• Calcul de MF en fonction de x.

$$MF = 4 - x$$

La consommation (en litres) du tracteur sur la distance CM est $1,5\sqrt{x^2+9}$ et la consommation (en litres) sur la distance MF est $1 \times (4-x)$.
Au total, la consommation du tracteur (sur la distance $CM + MF$) est $1,5\sqrt{x^2+9} + (4-x)$.
On obtient une fonction f définie sur $[0\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = 1,5\sqrt{x^2+9} + (4-x)$$

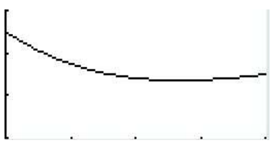
Il s'agit donc de trouver la valeur de x qui rend minimale cette fonction.

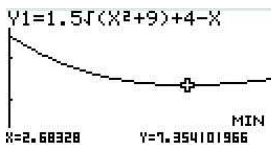
Pour cela on utilise la calculatrice, car on n'a pas les moyens en seconde de trouver cette valeur par le calcul.

On représente graphiquement f.
Pour cette représentation : $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 4$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = 6$, $Y_{Max} = 9$ et $Y_{Scale} = 1$.
On obtient :

Calculatrice

Pour paramétrer la fenêtre d'affichage, pour X cela ne pose pas de problème mais pour Y, on cherche un peu. Après plusieurs essais, voilà ce que j'ai trouvé. Avec le solveur grapphique





Calculatrice

Pour obtenir la valeur minimale de la fonction, on entre dans le solveur graphique , puis MIN on obtient les valeurs affichées à l'écran.

Ainsi, la consommation est minimale pour $x \simeq 2,683$ km, soit 2683 mètres.

Exercice 3

1. • Calcul de a^2 :

$$\begin{aligned} a^2 &= (6+2\sqrt{3})^2 \\ &= \underbrace{36 + 24\sqrt{3} + 12}_{a^2+2ab+b^2} \\ &= 48 + 24\sqrt{3} \end{aligned}$$

Calcul

En seconde, on commence à développer sans écrire tous les calculs ..... faites du calcul mental avec votre professeur ! Quel est le carré de $2\sqrt{3}$?

- Calcul de b^2 :

$$\begin{aligned} b^2 &= (3\sqrt{2}+2\sqrt{6})^2 \\ &= \underbrace{18+12\sqrt{12}+24}_{a^2+2ab+b^2} \\ &= 42+12\sqrt{4\times 3} \\ &= 42+24\sqrt{3} \end{aligned}$$

Calcul... encore

Si x et y positifs, $\sqrt{x^2\times y}=x\sqrt{y}$, ce qui permet d'obtenir un résultat en fonction de $\sqrt{3}$

2. La question précédente donne : $a^2=48+24\sqrt{3}$ et $b^2=42+\sqrt{3}$.

Ainsi, $a^2>b^2$. Pourquoi ? C'est évident, non ?

Comme a et b sont tous les deux positifs (pourquoi ? C'est évident !), alors :

$$a>b$$

Pourquoi ? Parce que deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leur carré.... ou autrement dit : la fonction carré étant strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, elle conserve l'ordre.

Regardez !

La question précédente n'est pas là pour rien. Et quand on regarde les carrés des nombres a et b, on voit bien quel est le plus grand, non ? Et si on peut comparer le carré de deux nombre, on peut comparer ces nombres (à condition qu'ils soient tous les deux positifs ou négatifs.... d'ailleurs pourquoi donc ?

3. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, elle change l'ordre entre les nombres et les images. Comme $a>b$, alors $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

Exercice 4

1. a. • Pour $t=100$, on obtient $f(100)=10\sqrt{100}=100$.
La fréquence est de 100 Hz lorsque la tension est de 100 N.

• Pour $t=400$, on obtient $f(400)=10\sqrt{400}=200$.
La fréquence est de 200 Hz lorsque la tension est de 400 N.

b. La question précédente donne : $f(100)=100$ et $f(400)=200$.

On passe de 100 à 400 en multipliant par 4, mais on passe de 100 à 200 en multipliant par 2. Il n'y a donc pas proportionnalité entre la tension et la fréquence.

Proportionnalité

La fonction racine carré ne traduit pas une situation de proportionnalité. Ce sont les fonctions linéaires qui traduisent de telles situations.

2. OUI ! ! ! La fonction racine carré est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Donc, plus la tension augmente, plus la fréquence augmente..... (même si ce n'est pas dans les mêmes proportions !).

Attention

Les calculs des deux images de la questions **1.** ne permettent pas de justifier ce résultat. En effet, même si c'est vrai pour deux valeurs particulières, cela ne suffit pas pour prouver le résultat général.

3. On cherche la tension t telle que $10\sqrt{t}=220$.

$$\begin{aligned} 10\sqrt{t} &= 220 \\ \sqrt{t} &= \frac{220}{10} \\ \sqrt{t} &= 22 \\ t &= 22^2 \\ t &= 484 \end{aligned}$$

Méthode

L'équation $\sqrt{x}=k$ pour $k\geqslant 0$ a pour solution $x=k^2$. cette équation doit devenir une équation de référence pour vous !

La tension qui permet d'obtenir la note La_2 est 484 N.

4. On cherche la tension t telle que $10\sqrt{t} = 198$.

$$\begin{aligned}
10\sqrt{t} &= 198 \\
\sqrt{t} &= \frac{198}{10} \\
\sqrt{t} &= 19,8 \\
t &= 19,8^2 \\
t &= 392,04
\end{aligned}$$

La tension qui permet d'obtenir la note Sol_2 est 392,04 Hz.

t	0	$392,04$	484	$+\infty$
$f(t)$	0	198	220	

On en déduit que les tensions comprises entre 392,04 N et 484 N permettent d'obtenir un son dont la fréquence est comprise entre celle du Sol_2 et celle du La_2.