

## MATHÉMATIQUES

### Variations et extremums (entraînement 3)

#### Exercice 1

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel  $x$  de la façon suivante :

- $x = 0$  pour le blanc ;
- $x = 1$  pour le noir ;
- $x = 0,01$  jusqu'à  $x = 0,99$  par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  est dite « fonction de retouche » si elle possède les trois propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; 1]$

Une nuance codée  $x$  est dite assombrie par la fonction  $f$  si  $f(x) > x$ , et éclaircie, si  $f(x) < x$ .

Ainsi, si  $f(x) = x^2$ , un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée  $0,2^2 = 0,04$ .

L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

1. On considère la fonction racine carrée.

Justifier que la fonction racine carrée est bien une fonction de retouche et indiquer sur les pointillés ci-contre les valeurs retouchées de l'image A par cette fonction.

*(On arrondira les valeurs au centième)*

...	...
...	...

2. On considère la fonction cube définie par :  $f(x) = x^3$ .

a. Justifier que la fonction  $f$  est une fonction de retouche.

b. Justifier que cette fonction éclaircit l'image. Expliquer.

*(aucun calcul n'est attendu dans cette question)*

c. Éclaircit-elle plus que la fonction carré ? Expliquer.

3. On considère la fonction de retouche  $g$  définie sur  $[0 ; 1]$  par :  $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$ .

En utilisant la calculatrice, dire si cette fonction assombrit ou éclaircit l'image. Expliquer.

*(aucun calcul n'est attendu dans cette question)*

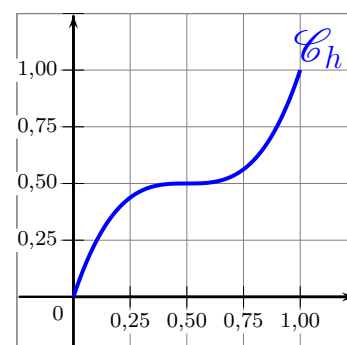
4. On considère la fonction de retouche  $h$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par :  $h(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$ .

La représentation graphique  $\mathcal{C}_h$  de cette fonction est donnée ci-contre.

a. Montrer que 0,5 est une solution de l'équation  $h(x) = x$ .

b. Résoudre graphiquement l'inéquation  $h(x) \leq x$ .

c. Interpréter ce résultat en terme d'éclaircissement ou d'assombriement.



5. On considère dans cette question la fonction de retouche  $u$  définie par :  $u(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$ .

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

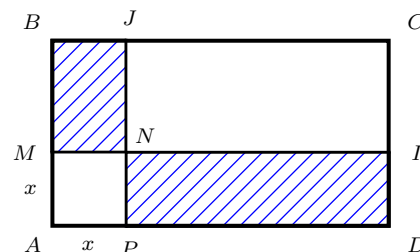
La modification d'une nuance codée 0,14 par la fonction  $u$  sera-t-elle perceptible visuellement ? Justifier.

### Exercice 2

$ABCD$  est un rectangle tel que  $AB = 5$  et  $AD = 10$ .

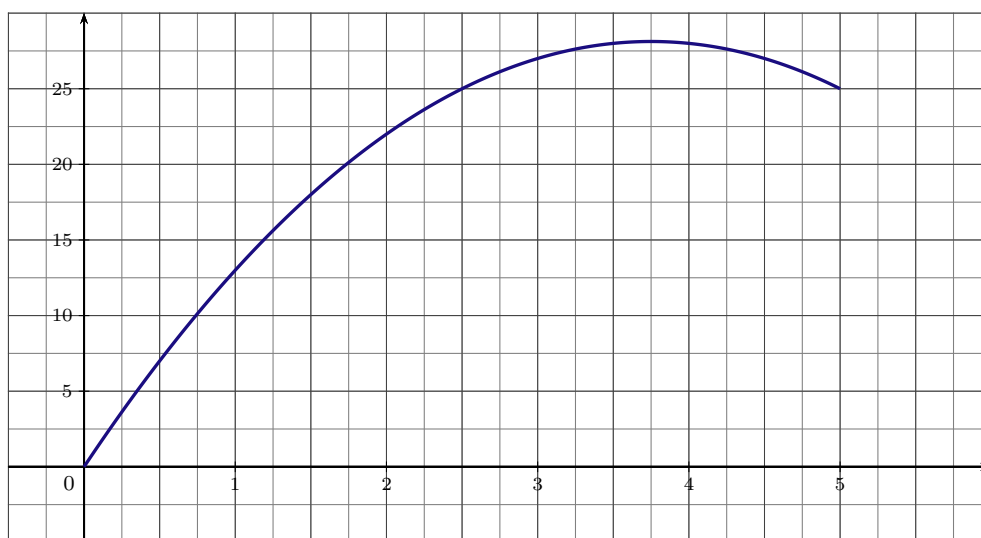
$M$  étant un point du segment  $[AB]$ , on construit le carré  $AMNP$  et le rectangle  $NICJ$  comme indiqué sur la figure ci-contre.

On pose  $AM = x$  et on note  $f(x)$  l'aire de la partie hachurée.



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

2. La courbe représentative de la fonction  $f$  est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



Avec la précision permise par le graphique, déterminer :

- a. la distance  $AM$  pour que l'aire de la partie hachurée soit maximale ;
  - b. l'intervalle sur lequel l'aire de la partie hachurée est inférieure à 10 ;
  - c. les positions du point  $M$  pour que les aires hachurées et non hachurées soient égales.
  - d. le tableau de variations de la fonction  $f$ .
3. a. Montrer que la fonction  $f$  est définie par  $f(x) = 15x - 2x^2$ .  
 b. Écrire  $f(x)$  sous forme factorisée.
4. Le point  $A$  de coordonnées  $(1, 75 ; 20)$  semble être sur la courbe représentative de  $f$  ? L'est-il vraiment ? Justifier.
5. Est-il possible que l'aire de la partie hachurée soit supérieure à 28 ?
6. Nabolos affirme que plus  $x$  augmente, plus l'aire hachurée augmente. A-t-il raison ? Justifier.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....