MATHEMATIQUES
Variations et extremums : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

$f(x) = -5x + 8$

$m = -5 < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	

$g(x) = -4 + x$

$m = 1$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	

$h(x) = 3$

$m = 0$ donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$	3	$\rightarrow$	3

Exercice 2

1. Voir tableaux ci-dessous.

- Si $x \in [-2\ ;\ -1]$, alors $x^2 \in [1\ ;\ 4]$.

Pensez-y !

Il y a une inversion de l'ordre entre les nombres et les images du fait de la décroissance de la fonction carré sur $]-\infty\ ;\ 0]$. Donc, faites attention de bien mettre les nombres dans le bon ordre dans l'intervalle image.

x	$-\infty$	-2	-1	0		$+\infty$
x^2	$\searrow$	4	1	0	$\nearrow$	

- Si $x \in [5\ ;\ 8]$, alors $x^2 \in [25\ ;\ 64]$.

x	$-\infty$		0	5	8	$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	25	64	$\nearrow$

- Si $x > 3$, alors $x^2 > 9$

x	$-\infty$		0	3	$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	9	$\nearrow$

- Si $x < -5$, alors $x^2 \geqslant 25$

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	25	0	$\nearrow$

- Si $x \in [-4\ ;\ 1]$, alors $x^2 \in [0\ ;\ 16]$

Attention

Sur $[-4\ ;\ 1]$, la fonction carré n'est pas monotone. On regarde donc le minimum et le maximum de x^2 lorsque $x \in [-4\ ;\ 1]$. La réponse $[1\ ;\ 16]$ est fausse puisque lorsque $x = 0,5 \in [-4\ ;\ 1]$, $x^2 = 0,25 \notin [1\ ;\ 16]$.

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$
x^2	$\searrow$	16	0	1	$\nearrow$

- • Si $x^2 > 3$ alors $x \in]-\infty\ ;\ -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$.

Attention

Ici, on ne demande pas un encadrement de x ! Placez 3 dans le tableau de variations aux bons endroits (lorsque $x \in \mathbb{R}$, x^2 prend 2 fois la valeur 3).

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2	$\searrow$	3	0	3	$\nearrow$

2. a. Comparaison de $(-0,81)^2$ et $(-0,805)^2$

x	$-\infty$	$-0,81$	$-0,805$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	$(-0,81)^2$	$(-0,805)^2$	0	$\nearrow$

Méthode

On place dans le tableau les nombres $(-0,81)$ et $(-0,805)$ ainsi que les images par la fonction carré correspondantes, puis on compare ces image en indiquant le sens de variation de la fonction carré qui permet la comparaison.

On a $-0,81 < -0,805$
Comme la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ (qui contient les nombres $(-0,81)$ et $(-0,805)$), les images sont rangées dans l'ordre inverse. Ainsi,

$(-0,81)^2 > (-0,805)^2$.

b. Comparaison de $3,2^2$ et $3,02^2$

x	$-\infty$	0	$3,02$	$3,2$	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$3,02^2$	$3,2^2$	$\nearrow$

On a $3,02 < 3,2$
Comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ (qui contient les nombres $3,02$ et $3,2$), les images sont rangées dans le même ordre. Ainsi,

$3,02^2 < 3,2^2$.

Exercice 3

1. La fonction racine carrée est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et elle est strictement croissante sur cet intervalle.

x	0	$0,1081$	$0,123$	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\sqrt{0,1081}$	$\sqrt{0,123}$	↗

2. On a $0,1081 < 0,123$
Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ (qui contient les nombres $0,1081$ et $0,123$), les images sont rangées dans le même ordre. Ainsi,

$$\sqrt{0,1081} < \sqrt{0,123}$$

3. Avec le tableau de variations :

x	0	5	9	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\sqrt{5}$	3	↗

$x \in [5\ ;\ 9]$ signifie $5 \leqslant x \leqslant 9$ et comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$\sqrt{5} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{9} \text{ soit } \sqrt{5} \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$$

Exercice 4

Remarque

0 est le seul réel qui n'a pas d'inverse. En effet, si 0 avait un inverse, alors il existerait un réel a tel que $a \times 0 = 1$. Or $a \times 0 = 0$, on obtient donc l'égalité $0 = 1$. Ce qui est faux (vous le savez !). Donc 0 n'a pas d'inverse. Ce raisonnement porte le nom de raisonnement par l'absurde.

1. L'ensemble de définition de la fonction inverse est $\mathbb{R}^*$.

Tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$	-8	-7	0	$4{,}25$	$4{,}3$	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	↘	$-\dfrac{1}{8}$	$-\dfrac{1}{7}$	‖	$\dfrac{1}{4{,}25}$	$\dfrac{1}{4{,}3}$	↘

2. • $4,25 < 4,25$.
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Les nombres (positifs) et les images sont donc rangées dans l'ordre inverse.

Ainsi : $\dfrac{1}{4,25} > \dfrac{1}{4,3}$.

• $-8 < -7$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.
Les nombres (négatifs) et les images sont donc rangées dans l'ordre inverse.
Ainsi : $-\dfrac{1}{8} > -\dfrac{1}{7}$.

Conseil

Visualisez la situation dans le tableau de variations en plaçant 4,25 et 4,3 et leurs images.

Exercice 5

1. Tableau de variations de la fonction cube :

x	$-\infty$	$-0{,}8$	$-0{,}12$	$0{,}12$	$0{,}8$	$+\infty$
x^3	↗	$(-0{,}8)^3$	$(-0{,}12)^3$	$(0{,}12)^3$	$(0{,}8)^3$	↗

2. On a $0,12 < 0,8$
Comme la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, les images sont rangées dans le même ordre. Ainsi,

$$0,12^3 < 0,8^3$$

3. On a $-0,8 < -0,12$
Comme la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, les images sont rangées dans le même ordre. Ainsi,

$$(-0,8)^3 < (-0,12)^3$$