MATHEMATIQUES
Les vecteurs (entraînement 1 (corrigé))

Exercice 1

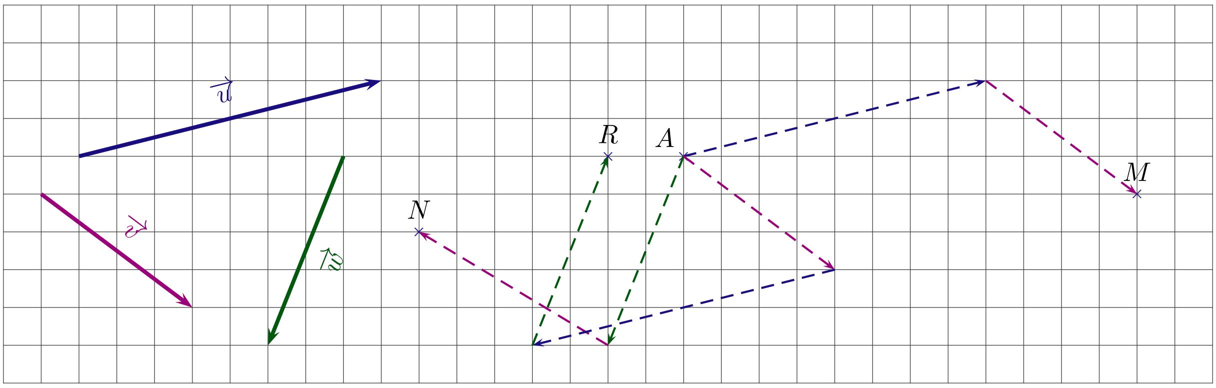
Méthode

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Pour construire le point M, tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$, il suffit de :

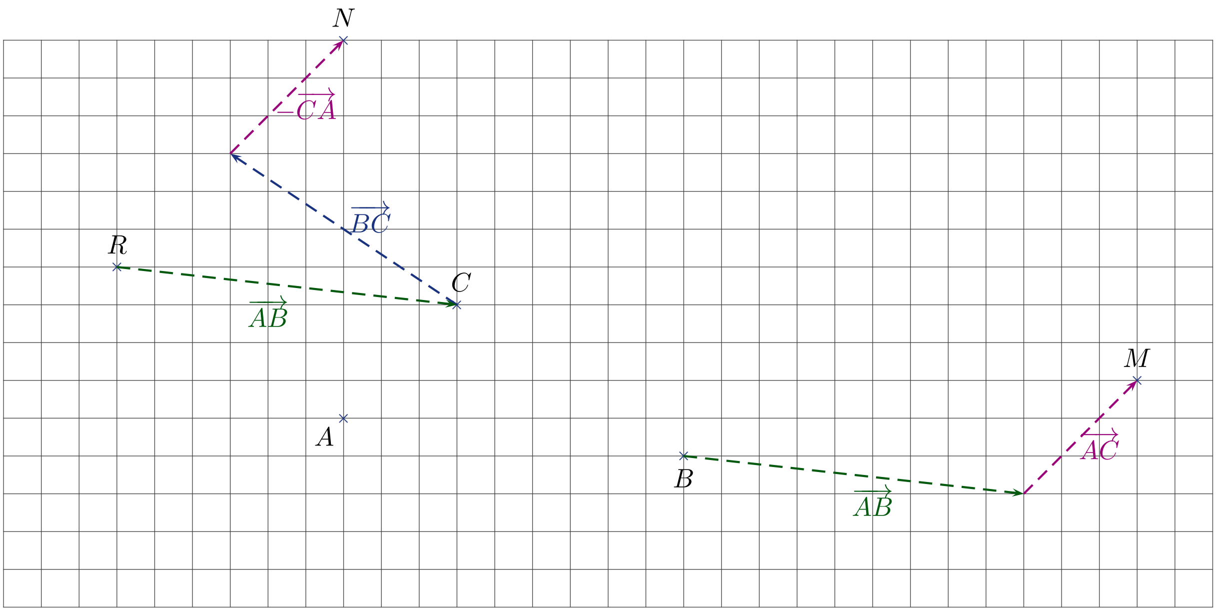
- tracez un représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A.
- au bout de ce vecteur, tracez un représentant du vecteur $\vec{v}$
- au bout de ce vecteur on a le point M.

Cette méthode s'appelle la méthode du boutabout !

Construire le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ revient donc à construire $\vec{u} + (-\vec{v})$ avec la méthode précédente.



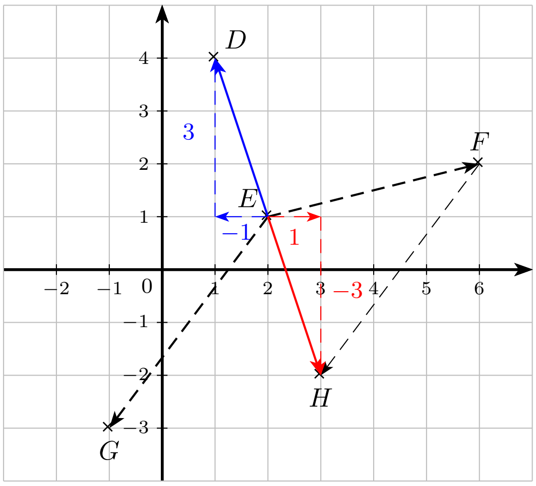
Exercice 2



Exercice 3

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ED}$ sont $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EH}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.



Exercice 4

1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :
$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

2. $ABCM$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$.

Conseil

Toujours faire un parallélogramme $ABCM$ à main levée pour ne pas se tromper dans l'ordre des points.

En notant $(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point M, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MC}$ sont données par :
$\begin{pmatrix} x_C - x \\ y_C - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-x \\ 7-y \end{pmatrix}$

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$ se traduit par : $\begin{cases} 8-x=6 \\ 7-y=-7 \end{cases}$

soit $\begin{cases} -x=-2 \\ -y=-14 \end{cases}$

soit $\begin{cases} x=2 \\ y=14 \end{cases}$.

Les coordonnées du point M sont $(2\ ;\ 14)$.

Rappel

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées. C'est-à-dire première coordonnée de l'un égale première coordonnée de l'autre et deuxième coordonnée de l'un égale deuxième coordonnée de l'autre.

Exercice 5

1.
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :
$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-5 \\ 2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont données par :
$\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont données par :
$\begin{pmatrix} -9+(-4) \\ 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \end{pmatrix}$

Explications

Pour calculer les coordonnées du vecteur somme, on a besoin des coordonnées de chacun des vecteurs.
En effet, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

2. Si on note $(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point D, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ sont données par :
$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y+4 \end{pmatrix}$

Les vecteur $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont égaux. Ils ont donc les mêmes coordonnées.

L'égalité $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$ se traduit par : $\begin{cases} x-5=-13 \\ y+4=7 \end{cases}$

soit $\begin{cases} x=-13+5 \\ y=7-4 \end{cases}$

soit $\begin{cases} x=-8 \\ y=3 \end{cases}$.

Les coordonnées du point D sont $(-8\ ;\ 3)$. On en déduit :

Remarque

Le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, c'est le vecteur $\vec{u}$ dont on a déjà les coordonnées.

3. L'égalité $\underbrace{\overrightarrow{AD}}_{=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{CD}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ s'écrit $\cancel{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{AC}}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Par conséquent, $ABDC$ est un parallélogramme.

Règle du parallélogramme

Soient A, B et C trois points.
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
En faisant un petit dessin, on voit très bien ce qui se passe. Faites-le !

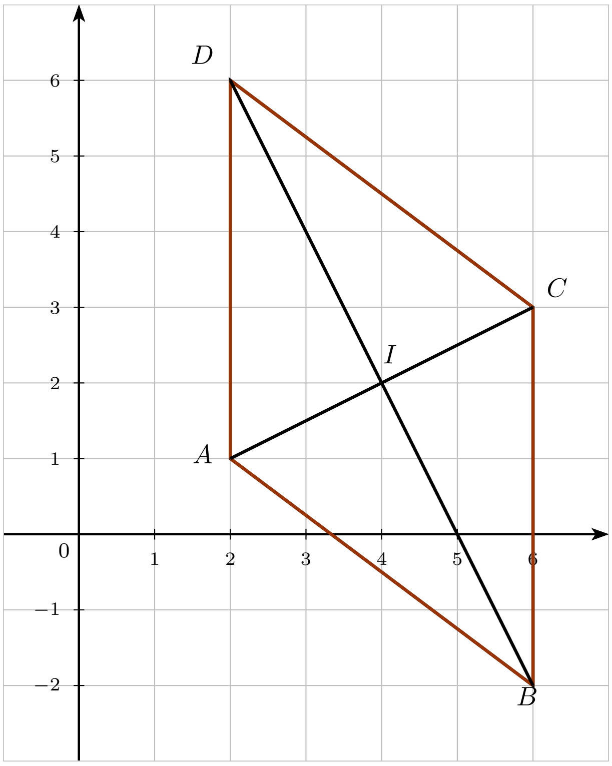
Exercice 6

a. $\vec{u} = \overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}}_{\text{Relation de Chasles}} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} = \underbrace{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}}_{\text{Relation de Chasles}} = \overrightarrow{BA}$.

b. $\vec{v} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{\text{Relation de Chasles}} \underbrace{-\overrightarrow{CD}}_{=\overrightarrow{DC}} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{DC}}_{\text{Relation de Chasles}} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$

Exercice 7

La figure associée à l'exercice :



1. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Conseil

Voici une méthode rapide pour montrer qu'un quadrialtère est un parallélogramme. Ne l'oubliez pas !

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$ sont données par : $\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées. Ils sont donc égaux.
On peut donc dire que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. On calcule donc les coordonnées du milieu du segment $[AC]$. On le note I.

Remarque

En choisissant le milieu de $[BD]$, on trouve le même résultat. Heureusement !

$x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2+6}{2} = 4$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$. Ainsi $I(4\ ;\ 2)$.

3. a. $ID = \sqrt{(x_D - x_I)^2 + (y_D - y_I)^2} = \sqrt{(2-4)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$.

b. Dans le triangle DAI, le plus grand côté est $[AD]$.

- $AD^2 = 5^2 = 25$.
- $AI^2 + ID^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{20})^2 = 25$.

On en déduit que $AD^2 = AI^2 + ID^2$ et donc que d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle DAI est rectangle en I.

c. Un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange. Ainsi, $ABCD$ est un losange.