MATHEMATIQUES
Les vecteurs (entraînement 2 (corrigé))

Exercice 1

1. Le point I est le milieu de $[AB]$, ainsi, $\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$.

2. En utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$.

3. En utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BE}}_{=2\overrightarrow{BC}} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.

Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, alors $\boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}}$.

4. En utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AF} = \underbrace{\overrightarrow{AI}}_{=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} + \underbrace{\overrightarrow{IF}}_{=\overrightarrow{AD}} = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$.

5.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\end{array}\right\} \text{ Ainsi, } \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}}_{=\overrightarrow{AE}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}}.$$

L'égalité $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ prouve que le point F est le milieu de $[AE]$.

F est le milieu de $[AE]$

Autre méthode pour prouver que F est le milieu de $[AE]$:
Dans le triangle ABE, I est le milieu de $[AB]$ et (IF) est parallèle à (BC), d'après le théorème de la droite des milieux, F est le milieu de $[AE]$.

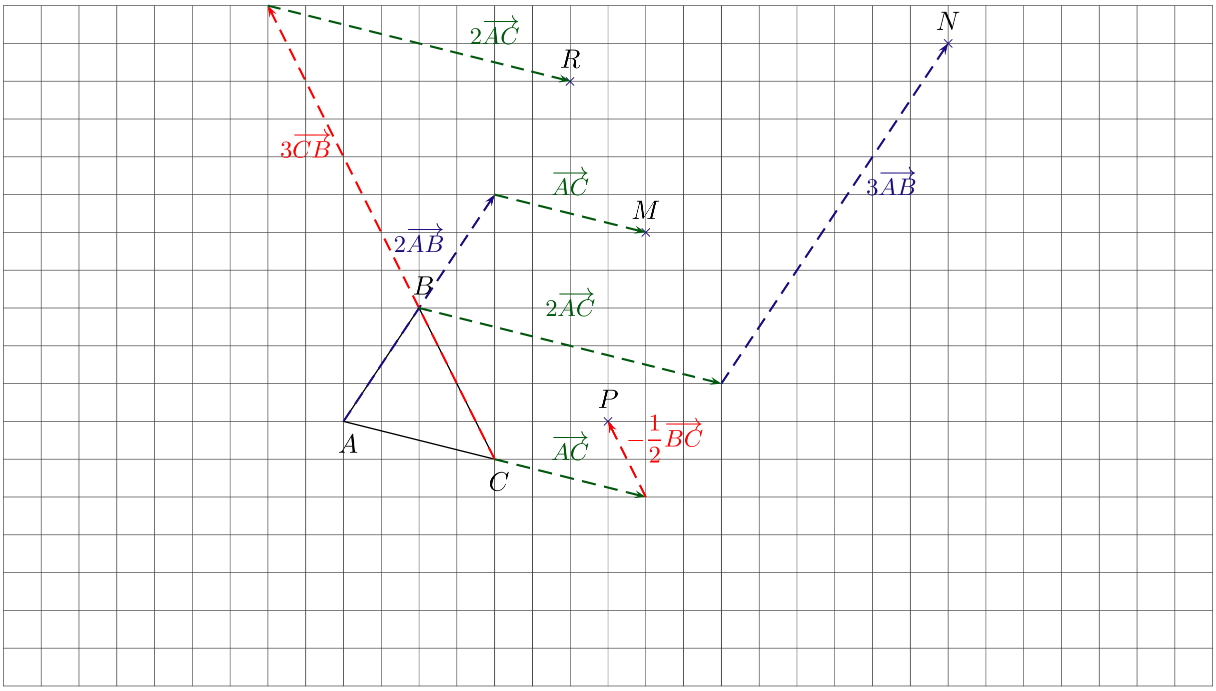
6.
- Les coordonnées du point B sont : $(1\ ;\ 0)$.
- Les coordonnées du point C sont : $(1\ ;\ 1)$.
En effet, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- Les coordonnées du point F sont : $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.
En effet, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- Les coordonnées du point E sont : $(1\ ;\ 2)$.
En effet, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.

Coordonnées dans un repère

Dire que le point M a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(A; B, D)$ signifie que :

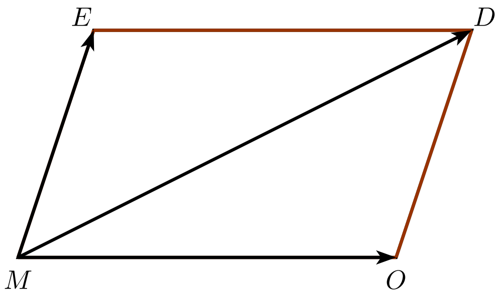
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$$

Exercice 2



Exercice 3

1. Un petit schéma :

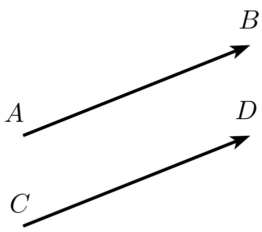


Remarque

C'est la règle du parallélogramme (somme de deux vecteurs ayant la même origine : ici le point M).

L'affirmation est vraie.

2. Un petit schéma :



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, donc $ABDC$ est un parallélogramme.
Ainsi, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

L'affirmation est vraie.

3. L'affirmation est vraie. Les deux vecteurs ayant la même origine et étant égaux, ils ont la même extrémité.

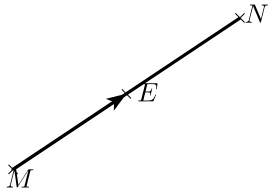
4. Si $\vec{u}=\vec{v}$ alors il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\times\vec{v}$. C'est $k=1$. Donc les vecteurs sont bien colinéaires.

Réciproque

Attention, la réciproque est fausse. En effet si deux vecteurs sont colinéaires ils ne sont pas forcément égaux.

5. Un petit dessin pour voir.
Les vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{NM}$ ne sont pas de même sens.

L'affirmation est fausse.



6. Question plus difficile.
- Commençons d'abord par exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des mêmes vecteurs, c'est-à-dire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$:

$$\vec{u}=4\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\vec{v}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{AB}-\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}.$$

- Essayons d'exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\vec{v}$.

$$\vec{u}=4\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=-2\underbrace{\left(-2\overrightarrow{AB}-\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)}_{=\vec{v}}=-2\vec{v}.$$

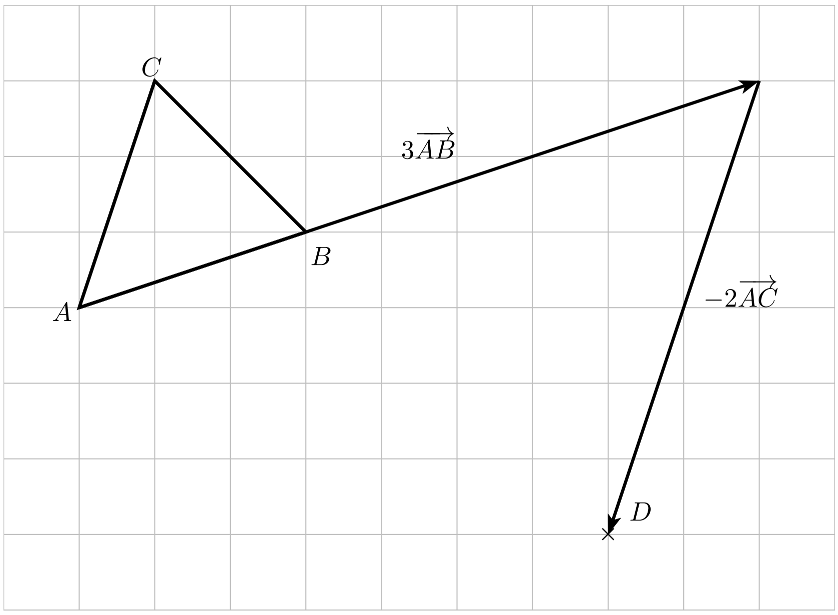
Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires.
L'affirmation est vraie.

Autre méthode

Dans le repère $(A;B,C)$ le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(4~;~\frac{3}{4}\right)$ et le vecteur $\vec{v}$: $\left(-2~;~-\frac{3}{8}\right)$.
Les produits en croix : $4\times\left(-\frac{3}{8}\right)=-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{4}\times(-2)=-\frac{3}{2}$ sont bien égaux, ce qui prouve que les coordonnées sont proportionnelles et donc que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 4

1. Figure soignée.



2. **a.** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b. En utilisant l'égalité $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{BD} & = & \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ & = & -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ & = & 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{array}$$

3. On essaie d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{BC}$ en fonction de vecteur $\overrightarrow{BD}$ (ou le contraire).

Explications

L'idée est de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires. Ecrivez les deux égalités obtenues l'une en dessous de l'autre. Cela permet de mieux voir les choses.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{array}\right\} \text{ Ainsi, } \overrightarrow{BD} = -2(\underbrace{-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}_{=\overrightarrow{BC}}) = \boxed{-2\overrightarrow{BC}}.$$

L'égalité $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BC}$ prouve que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc que les points B, C et D sont alignés.